

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXVII - ANNO CXXXIX

(2000)



LIGUORI EDITORE







SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXVII - ANNO CXXXIX

*(2000)*

LIGUORI EDITORE

Il presente volume è stato realizzato col contributo della Regione Campania

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione dell'editore. L'AIDRO (Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere dell'Ingegno), via delle Erbe 2, 20121 Milano, potrà concedere una licenza di riproduzione a pagamento per una porzione non superiore a un decimo del presente volume.

Prima edizione italiana Dicembre 2000  
Liguori Editore, S.r.l.  
via Posillipo 394  
I 80123 Napoli

Copyright © Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 2000

Napoli : Liguori, 2000  
ISBN 88 - 207 - 3205 - X

*Ristampe:*

---

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 2005 2004 2003 2002 2001 2000

Questo volume è stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

## INDICE

G. Frigione, N. Mairo - <i>Il calcestruzzo ad alta resistenza</i>	pag. 7
A. D'Aniello, G. Giordano - <i>Prodotti degli elementi di un gruppo finito</i>	» 19
C. Ciliberto - <i>Breve storia della Scuola Matematica Napoletana</i>	» 25
C. De Castro R. Lanzetta, L. Mangoni, E. Manzo, A. Molinaro, M. Parrilli - <i>Use of 2,2,2-Trifluoroethanol for Intramolecular Hydrogen Bonding Stabilization in Carbohydrates</i>	» 93
R. Sersale - <i>Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota I: Malte e calcestruzzi con addizione di fumo di silice condensato</i>	» 101
F. Capone, M. Gentile - <i>A note on thermal convection for fluids with strongly temperature dependent viscosity</i>	» 111
F. Capone, S. Rionero - <i>Thermal convection with horizontally periodic temperature gradient</i>	» 119
M. Gentile, S. Rionero - <i>A note on the global nonlinear stability for penetrative convection in porous media for fluids with cubic density</i>	» 129
R. Sersale - <i>Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota II: Malte e calcestruzzi con addizione di ceneri di pula di riso</i>	» 143
R. Sersale - <i>Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota III: Malte e calcestruzzi con addizione di FILLER calcareo</i>	» 149
K. Peiffer, A. Ya Savchenko - <i>On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable</i>	» 157
S. Rionero, I. Torcicollo - <i>On the pointwise continuous dependence of an approximate solution of a nonlinear heat conduction ill-posed problem</i>	» 169
R. Gatto - <i>La discussione sul metodo e la sfida di Vincenzo Flauti ai matematici del Regno di Napoli</i>	» 181
L. Carbone, D. Cioranescu, R. De Arcangelis, A. Gaudiello - <i>An Approach to the Homogenization of Nonlinear Elastomers in the Case of the Fixed Constraints Set</i>	» 235



## Il calcestruzzo ad alta resistenza

Nota di Giuseppe Frigione e Nicoletta Mairo<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Ordinario Riccardo Sersale  
(Adunanza del 15 gennaio 2000)

*Key words:* high strength concrete, microstructure, technology, silica fume

**Abstract** - The present paper traces briefly the appropriate microstructure leading to high strength concrete with compressive strength of more than 100 N/mm<sup>2</sup>. It is then reported the state of art about the manufacturing technology and the characteristics of the raw material. Finally, the mechanical properties particularly the stress – strain behaviour, are described.

**Riassunto** - E' descritta la microstruttura che permette di ottenere calcestruzzi cementizi con valori di resistenza alla compressione superiori a 100 N/mm<sup>2</sup>. Si traccia poi lo stato dell'arte per quanto attiene la loro tecnologia di produzione ed i materiali da utilizzare. Infine si descrivono le loro caratteristiche meccaniche con particolare riguardo al comportamento sforzo-deformazione.

### 1 - INTRODUZIONE

Il termine calcestruzzo ad alta resistenza (High Performance Concrete-HPC) ha assunto negli anni un diverso significato. Negli anni '50, ad esempio, negli Stati Uniti si considerava ad alta resistenza un calcestruzzo con una resistenza a compressione di soli 35 N/mm<sup>2</sup>(1). Già negli anni '60, invece, erano normalmente prodotti calcestruzzi con resistenza di 45 N/mm<sup>2</sup>. Negli anni '70 furono realizzate opere in calcestruzzo con resistenze prossime a 70 N/mm<sup>2</sup>. Oggi calcestruzzi con resistenze superiori a 80 N/mm<sup>2</sup> rappresentano conglomerati usualmente disponibili. Per quanto attiene all'Europa, occorre rilevare che il termine "Calcestruzzo ad alta resistenza" non assume lo stesso significato in tutti i paesi. In linea di massima, tuttavia, si può ammettere che appartengono a questa categoria i calcestruzzi la cui resistenza caratteristica a compressione sia superiore a quella massima ammessa dai regolamenti nazionali (circa 60 N/mm<sup>2</sup>). Tuttavia, a causa della mancanza d'idonea normativa, in Italia questi calcestruzzi sono poco conosciuti e di rado impiegati. La tecnologia del calcestruzzo in questi ultimi anni ha poi fatto enormi passi avanti tanto che recenti materiali cementizi, in forma di RPC (Reactive Powder

---

<sup>1</sup> Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Chimica e dei Materiali. 87030 Rende, Cosenza (Italy).

Concrete), raggiungono una resistenza a compressione che, con tecniche produttive più sofisticate (ad esempio per pressatura), può arrivare fino a  $800 \text{ N/mm}^2$ . Inoltre, passando da un normale calcestruzzo ad un materiale RPC è modificato il comportamento da fragile a duttile del calcestruzzo: l'energia di frattura aumenta da qualche centinaio a qualche decina di migliaia di  $\text{J/m}^2$ .

In questa sede ci si prefigge, comunque, di tracciare lo stato dell'arte su questi nuovi materiali cementizi limitatamente a quello impiegabile nelle costruzioni civili con le tecniche utilizzate nella produzione del calcestruzzo tradizionale: miscelazione in betoniera, trasporto, getto in casseforme, vibrazione.

La tecnologia per ottenere il calcestruzzo ad alta resistenza consiste fondamentalmente nel ridurre significativamente l'acqua di impasto fino a rapporti a/c di  $0,25 \div 0,30$  e, talvolta, anche  $0,20$  attraverso l'impiego di superfluidificanti e aggiungere alla miscela materiali estremamente fini, di dimensioni inferiori al micron, [silica fume, loppa d'altoforno, cenere volante (di seguito detta fly ash), riempitivi calcarei e perfino nerofumo]. I superfluidificanti deflocculano i granuli di cemento talché l'acqua necessaria per l'impasto subisce un'apprezzabile riduzione in quanto una gran quantità di questa non è più trattenuta tra i granuli di cemento tra loro agglomerati. Le particelle fini riempiono i vuoti interstiziali fra i granuli di cemento (dimensioni  $1-80 \mu\text{m}$ ) in modo da ottenere una matrice cementizia più densa e meno porosa. Così operando, si riduce la distanza tra i granuli di cemento drasticamente e la matrice legante diviene estremamente densa e compatta. La matrice cementizia che avvolge gli elementi lapidei - e che nei calcestruzzi ordinari rappresenta l'anello debole della catena per la sua maggiore porosità - diventa meccanicamente perfino più resistente dei comuni aggregati per la maggiore compattezza della sua microstruttura. In queste condizioni, l'anello debole della catena diventa quella sottilissima area del materiale, qualche decina di  $\mu\text{m}$ , situata all'interfaccia tra aggregato e matrice cementizia, nota con il nome di "zona di transizione".

E' stato dimostrato sperimentalmente che anche adoperando materiali normali, se si rispettano questi principi, è possibile ottenere un calcestruzzo con valore di resistenza di  $60-80 \text{ N/mm}^2$ , senza un consistente aumento dei costi.

Un calcestruzzo è un materiale poroso ed eterogeneo. La matrice che circonda gli aggregati è costituita da differenti idrati, dei quali i più importanti sono i silicati idrati C-S-H, che appaiono sotto forma di fibre, e  $\text{Ca(OH)}_2$  che cristallizza in lastre esagonali. La porosità totale della pasta di cemento Portland è tra il 25 e 30% in volume per un rapporto acqua/cemento (a/c) di 0,50. Questa porosità è composta da due tipi di vuoti: i pori intrinseci del C-S-H, d'alcuni nanometri di grandezza e i pori capillari tra gli idrati, dovuti all'acqua non reagita, le cui dimensioni variano tra 100 nm e parecchi mm.

La bassa resistenza meccanica del calcestruzzo è stata attribuita alla porosità capillare e all'eccesso d'acqua che è necessaria per la lavorabilità.

Nel 1897, Féret (2) diede una espressione della resistenza a compressione come segue:

$$R_c = A \left( \frac{c}{c + w + a} \right)^2$$

dove  $c$ ,  $w$ ,  $a$  sono rispettivamente il volume di cemento, d'acqua e d'aria ed  $A$  è una costante dipendente dai materiali impiegati.

Da questa formula si ricava che riducendo il rapporto  $a/c$ , si ha un incremento di resistenza. Tuttavia il rapporto  $a/c$  deve tenere conto della lavorabilità.

In teoria, è necessaria una semplice riduzione del rapporto  $a/c$  compensato da aggiunta di additivi alti riduttori d'acqua (High-Range Water-Reducing Admixture). In pratica ciò produce una notevole perdita di lavorabilità – in genere misurata attraverso la perdita di slump - al punto che, con alcuni cementi, mantenere uno slump di 200 mm, un'ora dopo il mescolamento, è piuttosto difficile. Il vero problema nella produzione di HPC, piuttosto che la resistenza meccanica - che è una variabile dipendente -, è da ricercarsi in questa perdita di slump, determinata dal relativamente basso rapporto  $a/c$ .

## 2 - LA ZONA DI TRANSIZIONE

Nel calcestruzzo fresco, sia per effetto parete sia in seguito alla compattazione, intorno ai granuli grossi dell'aggregato si formano dei film di acqua. Questa situazione determina un rapporto  $a/c$  più elevato, e quindi una maggiore porosità rispetto alla matrice cementizia. La formazione dei primi germi cristallini di  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  e di ettringite, che avviene in tutta la matrice cementizia per effetto dell'idratazione dei silicati e degli alluminati del cemento, è seguita da un maggior accrescimento dei cristalli di questi prodotti nella zona di transizione, più porosa per il maggior rapporto acqua/solido localmente esistente (3). La maggior porosità di questa zona consente anche lo sviluppo di cristalli di calce pluristratificati, orientati più o meno parallelamente alla superficie dell'aggregato, facilmente sfaldabili, e quindi meccanicamente più deboli.

A causa della maggiore porosità, la zona di transizione è sede di innesco e propagazione di microfessure che danneggiano irreversibilmente il materiale. Le microfessure si formano per una qualsiasi sollecitazione che provochi un movimento differenziale tra matrice cementizia e aggregato, in quanto dotati di modulo elastico diversi, come ad esempio un gradiente termico originato dal calore di idratazione del cemento, un ritiro igrometrico, un carico applicato ancorché inferiore a quello di rottura.

La presenza di microfessure nella zona di transizione, oltre ad influenzare le proprietà meccaniche ed elastiche del calcestruzzo condiziona anche la permeabilità all'acqua e potenziali agenti aggressivi.

### 3 - MATERIALI

#### *Aggregati*

Per sfruttare al massimo il beneficio derivante da una matrice densa e compatta è necessario disporre di aggregati altrettanto densi e compatti e capaci di stabilire un ottimo legame adesivo con la matrice cementizia nella zona di transizione.

La resistenza intrinseca dell'aggregato è un problema minore nei calcestruzzi tradizionali quando cioè il rapporto a/c è nell'intervallo  $0,50 \div 0,75$  mentre assume un'importanza notevole nell'intervallo  $0,25 \div 0,30$  (4).

Secondo Howard e Leatham (5), l'aggregato grosso ideale per i calcestruzzi ad alta resistenza oltre a mostrare una buona resistenza deve avere una morfologia tale da abbassare il fabbisogno di acqua per l'impasto. Pertanto anche la forma, la tessitura e la levigatezza sono fattori importanti.

Un corretto approccio nella scelta degli aggregati può essere fatto adeguandosi, per ciascuna classe, alle caratteristiche definite dalla UNI 8520, per calcestruzzi di classe A.

L'aggregato di rocce ignee, contenente fenocristalli - cioè cristalli relativamente più grandi degli altri, ben distribuiti nella pasta di fondo -, può avere delle microfessure che creano delle zone di debolezza. Anche le rocce con mineralizzazioni in forma di venature possono contenere delle screpolature che indeboliscono l'aggregato. Gli aggregati di frantumazione (basalto, diabase, dolomiti, graniti), ben lavati, danno buoni risultati dal punto di vista delle resistenze meccaniche, probabilmente per la superficie irregolare che favorisce una migliore adesione alla matrice cementizia. Rispetto agli aggregati di origine fluviale, quelli di origine glaciale, essendo stati sottoposti ad una prolungata azione di frantumazione, presentano superficie tale da formare forti legami con la matrice cementizia. Tuttavia, gli aggregati di origine alluvionale, più tondeggianti, permettono di ottenere una data lavorabilità con minor fabbisogno di acqua.

Nella resistenza intrinseca degli aggregati ha notevole importanza anche il processo di frantumazione e di lavorazione in quanto essi possono produrre microfessurazioni della microstruttura: è logico pertanto che gli aggregati grossi con dimensione massima più piccola producano un calcestruzzo migliore e più resistente. Dimensioni fra 10 e 15 mm sono da preferire, nonostante che una dimensione massima più piccola dell'aggregato grosso porti ad una maggiore richiesta d'acqua. Inoltre, per assicurare un buon legame pasta-aggregato grosso, questi ultimi devono essere approssimativamente equidimensionali (6).

L'influenza del modulo elastico dell'aggregato grosso sulle resistenze del calcestruzzo ad alta resistenza non è stata dimostrata. Tuttavia, si può ipotizzare che un aggregato con un basso modulo elastico, cioè con un modulo non molto diverso dal modulo della matrice cementizia, sottopone a più basse tensioni il legame matrice-aggregato: questo è un vantaggio.

Cemento

Nella scelta del cemento, in aggiunta allo sviluppo della resistenza, è un fattore importante la richiesta di acqua per ottenere una data lavorabilità. Da questo punto di vista devono esser presi in esame sia la composizione chimica sia la distribuzione granulometrica del cemento.

La finezza, la quantità di C<sub>3</sub>A e di alcali nel cemento, la cristallinità e forma polimorfa del solfato di calcio, sia nella forma idrata (gesso) che anidra, possono influenzare la reologia e lo sviluppo della resistenza del calcestruzzo HPC. E' anche importante la compatibilità con l'additivo superfluidificante e con le aggiunte minerali.

La scelta deve ricadere su un:

- cemento con alte resistenze meccaniche e con alto flow per favorire nel calcestruzzo un basso contenuto di acqua di impasto,
- cemento con alto rapporto C<sub>2</sub>S/C<sub>3</sub>S che favorisce lo sviluppo delle resistenze alle lunghe stagionature,
- cemento con basso contenuto di C<sub>3</sub>S e C<sub>3</sub>A per abbassare il calore di idratazione della pasta di cemento e ridurre il contenuto di idrossido di calcio che non contribuisce allo sviluppo delle resistenze finali.

La scelta in genere ricade su cementi di classe 52,5 e 42,5 caratterizzati da elevate prestazioni meccaniche a 28 giorni. Se non vi sono particolari necessità di ottenere calcestruzzi con elevate resistenze meccaniche alle brevissime stagionature l'impiego di un cemento 42,5 è consigliabile per il più lento sviluppo del calore di idratazione, fattore quest'ultimo che potrebbe far nascere delle microfessure all'interno della struttura in fase di raffreddamento.

Dosaggi ottimali sono fra i 450 e 550 kg di cemento per metro cubo.

Gli additivi

I superfluidificanti sono combinazioni di componenti organici e non sono tensioattivi (o surface-active admixture). I più diffusi sono a base di naftalina o melammina o polimeri acrilici e, più recentemente di eteri policarbossilici (7, 8). Qualche formulazione può contenere ritardanti o acceleranti di presa o prodotti chimici "de-foaming".

I superfluidificanti basati su polimeri di naftalene sulfonato e ligninsulfonato modificato possono apportare macrobolle di aria nel calcestruzzo, mentre i polimeri di melamina sulfonata non comportano alcun incremento del contenuto di aria. D'altra parte, alcuni superfluidificanti possono provocare una certa difficoltà per assicurare un adeguato sistema di microvuoti d'aria necessari per produrre una buona resistenza al gelo del calcestruzzo. Siebel (9) osservò, infatti, che in presenza di questi superfluidificanti le bolle di aria presenti nel calcestruzzo tendono ad unirsi in modo da formare larghi vuoti. In questo modo aumenta lo "spacing factor".

Una caratteristica dei superfluidificanti é la breve durata della loro azione. L'azione fluidificante è molto influenzata dalla velocità con la quale le differenti fasi minerali che caratterizzano il cemento Portland reagiscono con l'acqua, e dalla velocità alla quale le molecole dei superfluidificanti sono adsorbite ed intrappolate dagli idrati di neoformazione. Le fasi che presentano una rapida idratazione e consumano una sostanziale quantità di acqua sono due: il solfato di calcio emidrato che si può formare per disidratazione del gesso ( $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ) durante la macinazione e la fase interstiziale in cui  $\text{C}_3\text{A}$  e  $\text{C}_4\text{AF}$  reagiscono con il gesso per formare ettringite.

La riduzione di fluidità che è spesso osservata come un'interazione fisico-chimica tra un superfluidificante e il cemento è normalmente dovuta alla formazione di ettringite. A causa della bassa solubilità i cristalli di ettringite iniziano a precipitare nella soluzione. L'acqua libera nel sistema resta intrappolata tra i cristalli di ettringite. La risultante riduzione dell'acqua libera causa una perdita di lavorabilità. Dunque il cemento Portland con un alto contenuto di  $\text{C}_3\text{A}$  può mostrare una perdita di slump molto veloce. La perdita di slump è anche maggiore a temperature relativamente elevate.

Le esperienze dimostrano che con cementi molto reattivi è difficile avere un slump di 50 mm dopo solo 30 minuti dalla miscelazione, anche se l'iniziale slump era di 200 mm. Allo scopo di mantenere per tempi più lunghi una accettabile lavorabilità, recentemente è stato sperimentato l'utilizzo di un additivo plastificante in unione all'additivo superfluidificante (10).

Il gran numero di fattori che influenza il meccanismo di fluidificazione (tipo e dosaggio di additivo, lunghezza della catena del polimero, distribuzione granulometrica e composizione minerale del cemento, regime di miscelazione) comporta che ogni additivo abbia un comportamento differente con differenti cementi. Inoltre esiste una quantità minima di superfluidificante che permette di mantenere la fluidità per tempi più lunghi. D'altra parte, relativamente elevati dosaggi possono ridurre le resistenze meccaniche. Pertanto è necessario, di volta in volta, determinare il dosaggio di additivo ottimale per ottenere l'effetto desiderato con un particolare cemento. All'uopo è stato proposto (11) un metodo rapido per individuare la compatibilità cemento-additivo e determinare il dosaggio ottimale di quest'ultimo (12).

La percentuale di additivo può variare naturalmente da miscela a miscela, ma è sconsigliabile andare oltre il 4% del peso delle parti fini: il cemento e aggiunte minerali. Il momento dell'immissione dell'additivo all'impasto è molto importante per poterne sfruttare al massimo l'efficacia.

#### Aggiunte idrauliche

Le aggiunte minerali, silica fume, fly ash o loppa d'altoforno granulata, sono componenti essenziali che devono essere considerati nella selezione dei materiali per calcestruzzi ad alta resistenza.

L'impiego di silica fume é ormai generalizzato in tutti i conglomerati con alte prestazioni meccaniche.

La silica fume è un sottoprodotto dell'industria del silicio e delle leghe metalliche ferro-silicio. Questo materiale ha conosciuto un successo strepitoso nel settore delle malte e del calcestruzzo solo dopo l'invenzione dei superfluidificanti negli anni '70. Prima di allora la silica fume, che pure era disponibile, non trovò che sporadiche applicazioni nel settore del calcestruzzo senza vantaggi. L'elevata area superficiale della silica fume, che arriva fino a 20-30 m<sup>2</sup>/g, fa aumentare la richiesta di acqua per la confezione del calcestruzzo e, in assenza di additivo fluidificante, in conseguenza del maggiore rapporto a/c, si annulla il vantaggio derivante dalla densificazione della matrice cementizia.

La silica fume si presenta sotto forma di sferette con dimensioni comprese tra 0.01 e 1 µm, cioè 50-100 volte più piccole di quelle del cemento. Questo fatto permette la sistemazione delle sfere di silica fume nei vuoti presenti tra i granuli di cemento (così come la sabbia si sistema tra i granuli di ghiaia) con il risultato di ottenere un sistema meno poroso, più densificato e quindi meccanicamente più resistente e impenetrabile da qualsiasi agente aggressivo.

Le aggiunte minerali (come fly ash o silica fume) hanno il preciso compito di trasformare l'idrossido di calcio, che si produce nell'idratazione del cemento Portland, per reazione pozzolanica, in un costituente che contribuisce alla resistenza, vale a dire il silicato di calcio idrato.

In conclusione, tre importanti fattori sono responsabili dell'aumento della resistenza per il calcestruzzo in silica fume:

- raffinazione della dimensione dei pori e densificazione della matrice;
- raffinazione dell'interfaccia pasta-aggregato;
- riduzione del contenuto di CH.

La trasformazione di larghi pori in più piccoli come risultato della reazione pozzolanica della silica fume gioca un ruolo importante per la resistenza meccanica.

Nel calcestruzzi HPC con silica fume, il consumo di CH per reazione pozzolanica della silica fume evita la formazione di CH sull'interfaccia pasta-aggregato; il legame aggregato-CH-pasta è sostituito da un legame diretto tra il C-S-H della pasta e l'aggregato.

Alcuni studiosi hanno enfatizzato il ruolo non solo pozzolanico della silica fume nell'aumento della resistenza affermando che le particelle sferiche ultrafini della silica fume agiscono come un materiale di riempimento che fa diminuire il rapporto a/c ed aumentare la resistenza. Detwiler e Metha (13) contestano questo, affermando che benché l'iniziale raffinazione dei pori risulta dalle particelle di silica fume, la conseguente reazione pozzolanica gioca un ruolo importante.

La quantità di silica fume mediamente impiegata negli impasti é dell'ordine dell'8-15% (in peso) calcolato sul totale del materiale idraulico.

La loppa d'alto forno granulata, finemente macinata, con superficie specifica vicino a  $10000 \text{ cm}^2/\text{g}$ , è stata utilizzata per la preparazione di calcestruzzi ad alta resistenza. Attualmente, essa sovente è utilizzata in unione con la silice fume in percentuale del 20% di silice fume.

Sia la loppa sia la silice fume drasticamente riducono la formazione di CH ad ogni stadio di idratazione: ciò aumenta la resistenza meccanica. L'assenza di CH nella zona di transizione e la formazione di C-S-H aiuta a migliorare il legame pasta di cemento-aggregato.

Il ruolo dei due materiali cementizi è complementare nel senso che la silice fume contribuisce allo sviluppo della resistenza iniziale (7 giorni) mentre la loppa ha un ruolo fondamentale per la resistenza a lungo termine.

In un altro tipo di calcestruzzo HPC, la loppa viene sostituita dal fly ash (ASTM Classe F a basso contenuto di calcio), mentre il livello della silice fume rimane invariato. Il fly ash (cenere volante) è costituita principalmente da silice vetrosa che si è rappresa, durante il raffreddamento negli elettrofiltri, in goccioline microporose. Sono caratterizzate da una superficie specifica dell'ordine di  $5000 \text{ cm}^2/\text{g}$ .

I calcestruzzi con fly ash condividono la tendenza con gli altri calcestruzzi contenenti silice fume di sviluppare un gel ricco di silice a circa 7 giorni, che gradualmente si trasforma in C-S-H, così che la maggior parte dell'attività pozzolanica della silice fume è completa entro i 28 giorni. Dopo, la densificazione della matrice dipende dalla reazione del fly ash. La matrice appare più compatta, e non cambia anche il rapporto Ca/Si nel C-S-H.

#### 4 - MICROSTRUTTURA

Una delle maggiori caratteristiche del calcestruzzo ad alta resistenza rispetto a quella del calcestruzzo normale è la più uniforme e compatta microstruttura.

Quando il cemento Portland è combinato con le particelle ultrafini della silice fume con un basso rapporto  $a/c$ , la microstruttura di tale sistema consiste di pochi idrati cristallini formanti una più densa matrice di bassa porosità.

Con l'aumento della silice fume aumenta il contenuto di idrossido di calcio che è trasformato in silicati di calcio idrati, mentre il restante idrossido di calcio tende a formare cristalli più piccoli, rispetto a quelli della pura pasta di cemento Portland.

La silice fume introduce dei considerevoli cambiamenti nella microstruttura della zona di transizione. Regourd *et al.* (14, 15) osservarono che in un HPC con silice fume tutto lo spazio attorno agli aggregati era occupato da un amorfo e denso C-S-H. Si forma un contatto diretto tra l'aggregato e i silicati di calcio idrati piuttosto che con l'idrossido di calcio come nei calcestruzzi normali.

Scrivener *et al.* (16) quantificarono la microstruttura interfacciale e mostrarono che la porosità di un calcestruzzo HPC con silice fume era praticamente assente al contrario dei calcestruzzi ordinari.

La morfologia e la composizione del C-S-H dei calcestruzzi normali è diversa rispetto ai calcestruzzi ad alta resistenza. Il secondo è meno cristallino e il rapporto Ca/Si è più basso. Inoltre ioni di natura diversa sono incorporati nella loro struttura determinando un aumento di resistenza all'azione aggressiva di ioni e alla reazione alcali-aggregati.

#### **5 - FORMULAZIONE DELLA MISCELA**

Particolare attenzione deve essere data alla distribuzione granulometrica degli aggregati. La curva degli aggregati dovrebbe cadere nel fuso riportato dalle norme ASTM. Buoni risultati si sono ottenuti seguendo la curva relativa all'equazione di Bolomey.

Per le frazioni granulometriche maggiori è bene avere a disposizione più di un materiale per permettere l'ottenimento di una curva degli aggregati il più continua possibile.

Il diametro massimo dell'aggregato dovrebbe essere, come si è già detto, intorno ai 15 mm, non solo per motivi di resistenza ma anche per permettere al calcestruzzo di aderire bene ai ferri di armatura.

Gli aggregati fini devono essere piuttosto grossi, con modulo di finezza tra 2,8 e 3,2 (17), poiché la miscela ha un alto contenuto di cemento e quindi è già ricca in particelle fini.

L'omogeneità dell'impasto è molto importante: è opportuno riempire la betoniera solo a 2/3 della sua capacità e prolungare i tempi usuali di miscelazione.

Anche la sequenza di immissione dei componenti in betoniera ha grande importanza ed è opportuno seguire semplici regole:

1. versare prima una parte di acqua e metà dose di superfluidificante,
2. versare poi aggregati e cemento e mescolare per alcuni minuti,
3. aggiungere infine le restanti quantità di acqua e additivo lentamente e mescolare per alcuni minuti. Una parte dell'additivo può essere aggiunta immediatamente prima del getto del calcestruzzo nei casseri.

Nel conteggio dell'acqua totale deve essere tenuto conto dell'acqua aggiunta al calcestruzzo sotto forma di umidità degli aggregati e l'acqua presente negli additivi (la quale è circa il 50% del volume di additivo presente nell'impasto).

#### **6 - MESSA IN OPERA**

Le operazioni di getto, costipamento e maturazione del calcestruzzo ad alta resistenza non differiscono essenzialmente da quelle normalmente attuate per i calcestruzzi di classi inferiori se non per la maggior cura con la quale dovranno essere considerati tutti i parametri e le fasi influenti sulle resistenze finali del prodotto.

**7 - CARATTERISTICHE MECCANICHE**

In Tabella 1 si riportano valori caratteristici di resistenza a compressione ottenuti con l'impiego delle diverse aggiunte minerali.

Tabella 1. Resistenze a compressione ( $N/mm^2$ ) di HPC con loppa/silica fume, fly ash/silica fume e silica fume (18).

	Loppa - Silica fume	Fly ash-Silica fume	Silica fume
Acqua/mater. cementizi	0.22	0.30	0.30
12 ore	—	26	15.4
1 giorno	50	48	58.7
7 giorni	77	78	86.4
28 giorni	94	100	101
91 giorni	—	109	117

E' stato notato che la velocità dello sviluppo della resistenza del HPC oltre 28 giorni è generalmente più bassa di quella dei calcestruzzi normali, il che può essere dovuto ad una mancanza di acqua per un'ulteriore idratazione. Per un calcestruzzo stagionato in laboratorio con silica fume si può notare una leggera riduzione della resistenza a lungo termine. Tali osservazioni possono essere spiegate dall'esistenza di tensioni indotte dalla non omogenea asciugatura, che determinano delle compressioni interne.

Il migliorato legame influisce sul comportamento del HPC quando sottoposto a carichi. La curva stress-strain è lineare fino a circa l'80% della resistenza in contrasto con il 40% del normale calcestruzzo e l'estensione dell'isteresi allo scarico diventa molto piccola. Nel calcestruzzo armato anche il legame acciaio-calcestruzzo è migliorato dallo stesso meccanismo, e la migliorata microstruttura della zona di transizione acciaio-pasta di cemento migliora la resistenza a trazione delle barre di acciaio all'interno del conglomerato.

Per una caratterizzazione del calcestruzzo ad alta resistenza è necessario eseguire prove di rottura a compressione con il tracciamento del diagramma  $\sigma/\epsilon$ . In Figura 1 sono riportate le curve  $\sigma/\epsilon$  per calcestruzzi tradizionali ( $R_c$  uguale 20 e 45  $N/mm^2$ ) e calcestruzzi ad alta resistenza ( $R_c$  uguale 75, 100 e 120  $N/mm^2$ ). Il comportamento sforzo-deformazione del calcestruzzo ad alta resistenza evidenzia:

- una maggiore deformazione - rispetto ai calcestruzzi tradizionali - in corrispondenza del massimo sforzo applicato;
- una repentina caduta del ramo discendente ed una minore deformazione ultima, entrambe indici di una spiccata fragilità del materiale.

Questi comportamenti sono da amputarsi al miglioramento della qualità del materiale all'interfaccia pasta-aggregato. Infatti, occorre tener conto che il calcestruzzo é un materiale composito costituito essenzialmente da pasta di cemento e da aggregati. Entrambi i costituenti del calcestruzzo sono dei materiali fragili. Tuttavia, il calcestruzzo tradizionale presenta un comportamento duttile attribuibile all'enorme divario di rigidità dei materiali che lo compongono. A causa di questo divario, nel calcestruzzo tradizionale si determinano delle concentrazioni di sforzo in corrispondenza dell'interfaccia pasta-aggregato che provocano la formazione di un reticolo di microfessure. Dopo il superamento della resistenza massima le fessure determinano una redistribuzione dello sforzo all'interno del calcestruzzo e, quindi, una rottura di tipo duttile del materiale.

Nei calcestruzzi ad elevata resistenza, invece, il divario tra il modulo elastico della pasta e degli aggregati é molto ridotto. Questo determina una distribuzione più omogenea degli sforzi e, quindi, una ridotta microfessurazione all'interfaccia pasta-aggregato. La minore fessurazione determina una ridotta redistribuzione dello sforzo e di conseguenza una rottura di tipo fragile per questo materiale.

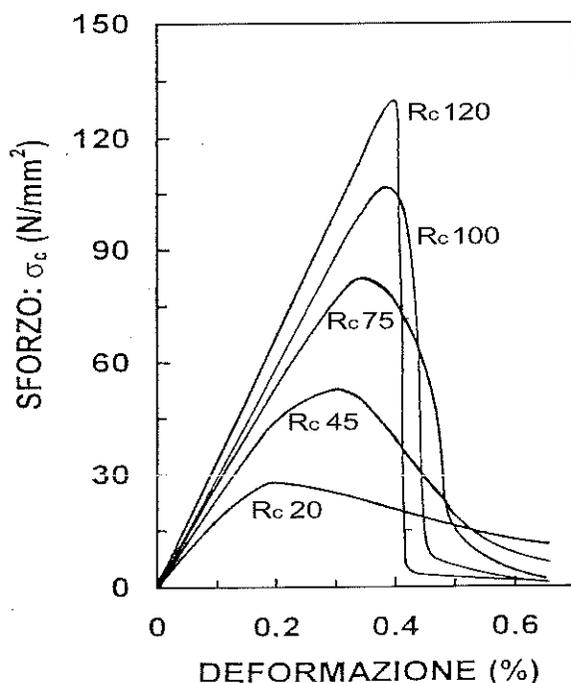


Figura I: Diagramma mostrante le curve  $\sigma/\epsilon$  per calcestruzzi tradizionali e calcestruzzi ad alta resistenza.

Ancora in breve, in termini di caratteristiche ingegneristiche, i calcestruzzi ad alta resistenza presentano rispetto ai calcestruzzi tradizionali un modulo elastico più elevato, maggiore rigidità, ridotta deflessione, minor fluage e, per la più densa struttura della matrice una durabilità di gran lunga maggiore. Questi calcestruzzi, infatti, sono definiti anche ad elevata "performance".

## 8 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Russel H.G.; (1987) Proceedings of the 1st Int. Symp. on the Utilization of High High Strength Concrete, Stavanger, Norway, pp 561-572.
2. Féret R.; (1892) Annales des Ponts et Chaussées, Série 7, Vol. 4, pp 5-164.
3. Metha P.K.; (1986) "Concrete. Structures, Properties and Materials", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
4. de Larrad F. and Belloc A.; (1997) ACI Materials J., Vol. 94, pp 417-426.
5. Howard N.L. and Leatham D.M.; (1989) Concrete International, pp. 26-30.
6. Mehta P.K. and Aitcin P.C.; (1990) "Microstructural basis of selection of materials and mix proportions for high-strength concrete". in Utilization of High-Strength Concrete – 2<sup>nd</sup> Int. Symp. ACI SP-121, Detroit, Michigan, pp 265-286.
7. Damtoft J.S., Herfort D., Yde E.; (1999) in "Modern Concrete Materials: Binders, Additions and Admixtures". Proceedings Int. Conf. University Dundee, Scotland, 8-10 Sept. 1999, Edited by R.K.Dhir and T.D.Dyer, Publ. T.Telford, pp 1-16.
8. Ohta A., Uomoto T.; (1999) in "Modern Concrete Materials: Binders, Additions and Admixtures". Proceedings Int. Conf. University Dundee, Scotland, 8-10 Sept. 1999, Edited by R.K.Dhir and T.D.Dyer, Publ. T.Telford, pp 433-443.
9. Siebel E.; (1989) ACI SP 119, pp 297-319.
10. Crompton S.J.; (1999) in "Innovation in Concrete Structures: Design and Construction". Proceedings Int. Conf. University Dundee, Scotland, 8-10 Sept. 1999, Edited by R.K.Dhir and M.R.Jones, Publ. T.Telford. pp 299-309.
11. Verhasselt A. and Pairen J.; (1989) Proceedings Int. Conf. On Superplasticizers and Other Chemical Admixtures in Concrete. SP 119, ACI. Farmington Hills, Mich. pp 133-156.
12. Macias A. and Goni S.; (1999) ACI Materials J., Vol. 96, pp 40-46.
13. Detwiler R.J. and Mehta P.K.; (1989) ACI Materials J., Vol. 86, pp 609-614.
14. Regourd M.; (1995) "Microstructure of high strength cement paste systems", Very High-Strength Cement-based Materials, Materials Research Society, Proceedings, vol. 42, pp. 3-17.
15. Regourd M., Mortureux B., Aitcin P.C., and Pinsonneault P.; (1983) Proceedings, 4<sup>th</sup> Int. Symp. on cement Microscopy, Nevada, USA, pp. 249-260.
16. Scrivener K.L., Bentur A. and Pratt P.L.; (1988) Advances Cement Research, Vol. 1. No. 2, pp. 230-237.
17. Canadian Standards Assn, A23.1-94 (1994).
18. Sarkar S.L.; (1991) High Strength Concrete and its Microstructure". in Cement and Concrete. Science & Technology. Ed. S.N. Ghosh. Publisher *abi* Books. New Delhi, pp 380-416.

## Prodotti degli elementi di un gruppo finito

Nota di Alma D'Aniello e Gabriele Giordano

Presentata dal Socio Mario Curzio  
(Adunanza del 5 febbraio 2000)

**SUMMARY.** - Let  $G$  be a finite group, consider the subset  $\text{Pr}(G)$  whose elements are product of all elements of  $G$  ( in any order). It can be seen that either  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$  or  $\text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset$ . We prove that  $\text{Pr}(G)$  and  $G'$  are disjoint if and only if  $|G|$  is even and the Sylow 2-subgroups of  $G$  are cyclic. We characterize nilpotent groups of class  $\leq n$  in terms of  $\text{Pr}(G)$ : precisely we prove that the class of  $G$  is  $\leq n$  ( $n \geq 2$ ) if and only if  $\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G)$ .

**SUNTO.** - Se  $G$  è un gruppo finito,  $\text{Pr}(G)$  denota il sottoinsieme di  $G$  costituito dagli elementi che sono prodotto di tutti gli elementi di  $G$ , in un ordine qualunque. Si prova in primo luogo che  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$  oppure  $\text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset$ ; il secondo caso si verifica se e solo se  $|G|$  è pari e i 2-sottogruppi di Sylow di  $G$  sono ciclici. Poi si caratterizzano i gruppi nilpotenti di classe al più  $n$  in termini di  $\text{Pr}(G)$ : precisamente si prova che la classe di nilpotenza di  $G$  è  $\leq n$  ( $n \geq 2$ ) se e solo se  $\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G)$ .

Il presente lavoro riguarda la caratterizzazione di classi di gruppi a partire da prodotti di elementi. Negli ultimi anni questa problematica ha dato luogo a lavori di vari autori (cfr. ad es. [1], [2], [3]).

**1. Notazioni e risultati preliminari.** Tutti i gruppi che si considerano sono finiti.

**1.1 Notazioni.** Siano  $G$  un gruppo e  $X$  una parte non vuota di  $G$ ; con  $\text{Pr}(X)$  si denoterà la parte di  $G$  costituita dagli elementi di  $G$  che sono prodotto di tutti gli elementi di  $X$ , con  $\hat{G}$  si denoterà il sottogruppo di  $G$  generato da  $\text{Pr}(G)$ , cioè

$$\text{Pr}(X) = \left\{ \prod_{x \in X} x^\sigma, \sigma \in S_X \right\} \quad \text{e} \quad \hat{G} = \langle \text{Pr}(G) \rangle$$

**1.2 Proposizione.** Per ogni gruppo  $G$  si ha  $G' \leq \hat{G}$ .

DIM. Con  $x \neq y \in G$  si ponga  $G \setminus \{x, y\} = X$ . Allora con  $a \in \text{Pr}(X)$  si ha  $ayx, axy \in \text{Pr}(G)$  e quindi

$$ayx \hat{G} = \hat{G} = axy \hat{G},$$

da cui

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = (ayx)^{-1}(axy) \in \hat{G}.$$

Per l'arbitrarietà di  $x, y \in G$  si ha  $G' \leq \hat{G}$ .  $\square$

**1.3 Lemma.** Sia  $V = V(n, 2)$  uno  $\mathbb{Z}_2$ -spazio vettoriale di dimensione  $n \geq 2$ . Allora  $\sum_{v \in V} v = 0$ .

DIM. Sia  $V = W \oplus \mathbb{Z}_2 u$  (con  $\dim W = n-1$ ). Allora si ha

$$\sum_{v \in V} v = \sum_{w \in W} w + \sum_{w \in W} (w + u) = 2 \sum_{w \in W} w + |W|u = 2^{n-1}u = 0. \quad \square$$

**1.4 Lemma.** Sia  $G$  un gruppo abeliano. Allora si ha

$$\text{Pr}(G) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } G_2 \text{ non è ciclico oppure } G_2 = 1 \\ \{z_0\} & \text{se } G_2 \text{ è ciclico } \neq 1 \end{cases}$$

dove  $G_2$  è il 2-Sylow di  $G$  e  $z_0$  è l'unica involuzione di  $G$  (se  $G_2$  è ciclico e  $\neq 1$ ).

DIM. Si ponga

$$\Omega_2(G) = \{g \in G, g^2 = 1\} := I$$

e si consideri la partizione di  $G \setminus I$

$$\{\{g, g^{-1}\}, g \in G \setminus I\}$$

Si ha ovviamente

$$\prod_{g \in G \setminus I} g = 1$$

e quindi l'asserto se  $G_2 = 1$ .

Sia ora  $G_2$  non ciclico. Allora  $I \cong V(n, 2)$ , con  $n \geq 2$ , e quindi  $\prod_{g \in I} g = 1$  in virtù del

Lemma 1.3. Ne segue

$$\prod_{g \in G} g = \left( \prod_{g \in I} g \right) \left( \prod_{g \in G \setminus I} g \right) = 1,$$

cioè l'asserto.

Sia infine  $G_2$  ciclico  $\neq 1$  e sia  $z_0$  la sua unica involuzione. Si ha  $I = \{1, z_0\}$  e quindi

$$\prod_{g \in G} g = \left( \prod_{z_0 \neq g \in G} g \right) z_0 = z_0$$

cioè l'asserto.  $\square$

**1.5 Proposizione.** *Sia G un gruppo che verifichi una delle condizioni seguenti:*

- (i)  $|G/G'|$  dispari;
- (ii)  $G_2 / G' \cap G_2$  non ciclico ( $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$ );
- (iii)  $|G'|$  pari.

Allora  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$ .

**DIM.** Sia T un trasversale di  $G'$  in G. Per il Lemma 1.4 si ha

$$\prod_{x \in T} G' x = \begin{cases} G', & \text{se } G_2 / G_2 \cap G' \text{ non è ciclico oppure } G_2 / G_2 \cap G' = 1 \\ G' z_0, & \text{se } G_2 / G_2 \cap G' \text{ è ciclico } \neq 1 \text{ (dove } G' z_0 \text{ è l'unica involuzione di } G/G') \end{cases}$$

Ne segue, con  $\prod_{g \in G} g \in \text{Pr}(G)$ :

$$\begin{aligned} G' \prod_{g \in G} g &= \prod_{g \in G} G' g = \prod_{x \in T} (G' x)^{|G'|} = \left( \prod_{x \in T} G' x \right)^{|G'|} = \\ &= \begin{cases} (G')^{|G'|} = G', & \text{se G verifica (i) o (ii)} \\ (G' z_0)^{|G'|} = G', & \text{se G verifica (iii)} \end{cases} \end{aligned}$$

Così, in ogni caso,  $G' \prod_{g \in G} g = G'$  e quindi  $\prod_{g \in G} g \in G'$ , cioè  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$  (per l'arbitrarietà di

$\prod_{g \in G} g \in \text{Pr}(G)$ ). Ne segue  $\hat{G} \leq G'$  e quindi  $\hat{G} = G'$  (Proposizione 1.2).  $\square$

**1.6 Corollario.** *Per ogni gruppo G si verifica una (ed una sola) delle eventualità seguenti:*

$$\text{Pr}(G) \subseteq G' \quad \text{oppure} \quad \text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset.$$

Più precisamente si ha:

$$\begin{aligned} \text{Pr}(G) \subseteq G' & \quad \text{se e solo se} \quad \hat{G} = G' \\ \text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset & \quad \text{se e solo se} \quad |\hat{G} : G'| = 2. \end{aligned}$$

**DIM.** Si usino le notazioni della Proposizione 1.5.

Se G verifica una delle condizioni (i), (ii), (iii), allora la proposizione precedente assicura che  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$ . Si supponga allora che G non verifichi alcuna delle condizioni (i), (ii), (iii); in particolare  $|G'|$  sia dispari. Allora, con  $\prod_{g \in G} g \in \text{Pr}(G)$ , si ha (cfr. DIM. Prop. 1.5):

$$G' \prod_{g \in G} g = (G' z_0)^{|G'|}$$

dove  $G'z_0$  è l'unica involuzione di  $G/G'$ . Ne segue, poiché l'ordine di  $G'$  è dispari:

$$G' \prod_{g \in G} g = G'z_0$$

e quindi  $\prod_{g \in G} g \notin G'$ ; più precisamente, per l'arbitrarietà di  $\prod_{g \in G} g \in \text{Pr}(G)$ , si ha

$$\text{Pr}(G) \cap G' \subseteq G'z_0 \cap G' = \emptyset$$

e

$$\langle \text{Pr}(G), G' \rangle = \langle G', z_0 \rangle;$$

ne segue, in virtù della Proposizione 1.2:

$$\hat{G} = G'\langle z_0 \rangle$$

e quindi

$$|\hat{G} : G'| = |\langle z_0 \rangle : \langle z_0^2 \rangle| = 2. \quad \square$$

**1.7 Proposizione.** *Per un gruppo  $G$  sono equivalenti le due condizioni seguenti:*

- (a)  $|G|$  è pari e i 2-Sylow di  $G$  sono ciclici;
- (b)  $\text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset$ .

**DIM.** Segue subito dalla dimostrazione della Proposizione 1.5 e dal Corollario 1.6, ove si tenga presente (teor. di Burnside) che un gruppo  $G$  con i 2-Sylow ciclici è 2-nilpotente (e pertanto  $|G'|$  è dispari).  $\square$

## 2. Caratterizzazione dei gruppi nilpotenti di classe $\leq n$ .

**Teorema.** *Per un gruppo  $G$  sono equivalenti le due condizioni seguenti:*

- (1)  $G$  è nilpotente di classe  $\leq n$ , con  $n \geq 2$ ;
- (2)  $\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G)$ .

**DIM.** (1) $\Rightarrow$ (2).

Sia  $\text{cl}(G) = n \geq 2$ . Se  $\text{Pr}(G) \subseteq G'$ , allora  $\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G)$ , perché  $G' \leq Z_{n-1}(G)$ .

Sia allora  $\text{Pr}(G) \cap G' = \emptyset$  (Cfr. Corollario 1.6). La Proposizione 1.7 assicura che i 2-Sylow di  $G$  sono ciclici e non identici, sicché la dimostrazione della Proposizione 1.5 fornisce  $\text{Pr}(G) \subseteq G'z_0$ , dove  $z_0$  è l'unica involuzione di  $G$ . Ne segue, poiché  $G' \leq Z_{n-1}(G)$  e  $z_0 \in Z(G) \leq Z_{n-1}(G)$ ,

$$\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G).$$

(2) $\Rightarrow$ (1).

L'ipotesi  $\text{Pr}(G) \subseteq Z_{n-1}(G)$  è equivalente a  $\hat{G} \leq Z_{n-1}(G)$ . Si ha allora, in virtù della Proposizione 1.2,

$$G' \leq \hat{G} \leq Z_{n-1}(G),$$

sicché  $G/Z_{n-1}(G)$  è abeliano, cioè  $G$  è nilpotente di classe  $\leq n$ .  $\square$

**Bibliografia**

- [1] M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj e A. Rhemtulla: "Groups with many rewritable products", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115** (1992), no.4, 931-934.
- [2] P. Longobardi e M. Maj: " The classification of groups with the small squaring property on 3-sets", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **46** (1992), no. 2, 263-270.
- [3] M. Herzog, P. Longobardi e M. Maj: " On a combinatorial problem in group theory ", *Israel J. of Math.*, **82** (1993), no.1-3, 329-340.



## Breve storia della Scuola Matematica Napoletana

Nota di Carlo Ciliberto

Presentata dal Socio Prof. C. Ciliberto  
(Adunanza del 5 febbraio 2000)

Riassunto - Breve storia dell'ordinamento degli studi di matematica a Napoli e dei relativi sviluppi organici, particolarmente nell'ultimo quarto dell'attuale secolo. Sviluppi futuri.

### 1 - INTRODUZIONE E RITORNO ALLE ORIGINI

Carlo Miranda, nell'adunanza del 7 gennaio 1977 dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, presentò una Nota dal titolo: "Breve Storia e Prospettive Future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli", pubblicata nella Serie IV - Vol. XLIV - 1977 del Rendiconto dell'Accademia.

Si tratta di un importantissimo documento sotto il profilo storico, culturale, di politica scientifica e sviluppo della ricerca matematica e dell'organizzazione degli studi di matematica a Napoli, ma in qualche modo, si può dire, anche dell'assetto, dello sviluppo e dell'evoluzione della matematica oltre i confini napoletani.

Miranda articolò la Nota nella descrizione storica dell'evoluzione delle istituzioni matematiche a Napoli nel periodo che va, all'incirca, dalla metà del '700 alla fondazione dell'Istituto di Matematica dell'Università degli Studi di Napoli, avvenuta nel 1944 (va ricordato che Egli fu chiamato dalla Facoltà di Scienze di Napoli a ricoprire la cattedra di Istituzioni di matematica a partire dal 1° novembre 1943, poco prima dell'occupazione, passò poi alla cattedra di Analisi Matematica nel 1945 e vi rimase fino al 28 maggio 1982, giorno in cui scomparve!), poi nell'esposizione puntuale della vicenda concernente la costituzione, l'organizzazione e lo sviluppo dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. ed infine nelle "Prospettive future", concludendola, così, di fatto alla fine del 1976.

Il periodo che è trascorso da tale anno ad oggi è ovviamente breve rispetto a quello affrontato da Miranda, ma si può affermare, senza timore di essere contraddetto, che esso è stato colmo di eventi, trasformazioni, mutamenti, innovazioni, fermenti, tuttora in evoluzione, come del resto lo stesso Miranda nella sua conclusione aveva previsto, sia pure con "una certa dose di pessimismo" attenuato dalla considerazione che "forse i giovani ci dimostreranno che abbiamo torto e che il futuro ci riserva giorni migliori".

Orbene proprio la rilettura della citata Nota, in particolare della conclusione, e la riflessione sulle trasformazioni, innovazioni, sviluppi avvenuti negli ultimi venti anni nel mondo universitario italiano, in particolare quello napoletano e, più in particolare, nell'ambito della "matematica" nel settore universitario a Napoli - e mi riferisco così complessivamente alle strutture universitarie antiche e recenti esistenti a Napoli - mi hanno convinto dell'utilità, dell'interesse, della necessità forse, di redigere un ulteriore pezzo di storia, questa volta precipuamente recente, della "Matematica" a Napoli, cioè nell'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e anche, in qualche modo, in altri Atenei Napoletani(1).

Miranda ricorda che "l'interesse per la Matematica era già vivo a Napoli nella seconda metà del settecento ma che solo per opera di Nicolò Fergola ha inizio un'attività costruttiva che prende il suo posto nella storia della matematica. Prima di lui si ricordano solo i nomi di alcuni insegnanti i cui contributi scientifici furono estremamente modesti".

Per la verità - come rileva Salvatore Rionero nella prolusione tenuta il 5.2.96 all'apertura dell'a.a. 1995-1996 dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"(2) - le origini della Scuola Matematica Napoletana ormai si fanno risalire almeno alla metà del Seicento, precisamente all'11.11.1653, data dalla quale in detta Università è stata sempre attiva "almeno una cattedra di disciplina matematica".

In proposito lo stesso Rionero ricorda che Federico Amodeo (1895-1946) nell'opera in due volumi sulla "Vita Matematica Napoletana" scrive: "Gli studi, che a Napoli avevano avuto un certo splendore sotto i Normanni, gli Svevi, gli Aragonesi, decadde sotto la dominazione Spagnola. La restaurazione degli studi fu iniziata nel 1615 dal viceré Fernando de Castro, conte di Lemos, il quale ebbe anche il merito di destinare alle scienze, che molto incomodamente s'insegnavano in S. Domenico Maggiore, l'ampio edificio eretto per la real cavallerizza fuori la porta di Costantinopoli (l'attuale Museo). Seguì subito dopo (1616), la prammatica del duca di Ossuna, che metteva in bilancio una cattedra di Matematica con lo stipendio di 60 ducati. Che a questa cattedra fosse provveduto prima del 1650 lo mette in dubbio l'Origlia e altri storici dell'epoca, ma a noi consta che .... nel 1653 fu affidata, con lo stipendio di 110 ducati, al filosofo e matematico Tommaso Cornelio. Egli la sostenne per trent'anni circa, leggendo per qualche tempo anche Astronomia e producendo allievi illustri. Egli in-

trodisse in Napoli le opere di Renato Descartes, con le quali introdusse la libertà di filosofare, scosse le menti sopite nel letargo dell'antica scuola, e facendo vedere di quanto aiuto la Geometria fosse alla Fisica, ed il vantaggio dell'applicazione delle leggi fisiche alla Medicina, ottenne che la Geometria si imparasse financo dai forensi".

Circa la figura di Fergola e della sua Scuola, va puntualizzato che Miranda si è limitato alla consultazione di fonti storico-bibliografiche essenzialmente secondarie.

Invero Egli all'inizio della Nota scrive: "Non essendo uno storico di professione ..... non privo di imprecisioni". Il suo scopo, come risulta palesemente nel secondo capoverso dell'introduzione della Nota, non è quello di scrivere "una storia critica dei risultati scientifici ottenuti dalla Scuola Matematica Napoletana". Naturalmente Egli deve avere integrato con ricordi di natura orale.

In proposito risultano opportune alcune considerazioni che sono la conseguenza di approfondimenti e studi effettuati nell'ultimo ventennio (cioè quasi successivo alla pubblicazione della Nota di Miranda) da parte di cultori di Storia della Matematica, anche napoletani. A tale proposito vanno citati Mario Castellano (Napoli), Franco Palladino (Napoli), Luciano Carbone (Napoli), Giuseppe Cardone (Napoli), Angelo Guerraggio (Milano Bocconi), Paolo de Lucia (Napoli), Simonetta Di Sieno (Milano), Massimo Galluzzi (Milano), Pietro Nastasi (Palermo), Aldo Morelli (Napoli), come già indicato in nota (2).

Per quanto concerne la figura di Nicolò Fergola, detta scelta metodologica ha avuto conseguenze non indifferenti in quanto Miranda sembra essersi limitato a consultare gli scritti di G. Loria, E. Pascal, F. Amodeo (da lui citati a pag. 3 della Nota). Probabilmente non avrà potuto prendere visione diretta delle opere di Fergola!

E' ben vero che, comunque, all'epoca della redazione della Nota erano già in possesso della Biblioteca Nazionale di Napoli i manoscritti (comprendenti alcuni trattati usati nell'insegnamento) di Fergola, ma su di essi non era stato ancora effettuato alcuno studio da parte degli storici. Miranda, quindi, ebbe così notizie vaghe e filtrate attraverso il punto di vista di un esperto di Geometria, quale fu Amodeo, dell'attività analitica svolta dal Fergola. Va ricordato, come rileva Rionero, che "L'armonia che regnava tra gli allievi di Fergola si ruppe sotto l'urto delle passioni politiche e degli avvenimenti che videro gli allievi svolgere rilevanti ruoli politici, sia nell'ambito della Repubblica Partenopea (1799) sia tra le file del lealismo borbonico. Infatti il Lauberg ed il Giordano furono ferventi giacobini ed esponenti di rilievo della Repubblica Partenopea. Vincenzo Flauti invece fu fervente lealista. Al cadere della Repubblica il Giordano subì il carcere e la condanna a morte cui riuscì a sfuggire per effetto del trattato di Lunewille (9.4.1801), che impose a Ferdinando IV di mettere in libertà i detenuti politici. Da allora Egli visse in Francia, ove morì nel 1835".

## 2 - NOTAZIONI IN MERITO A RIFORME DEL SISTEMA UNIVERSITARIO

All'epoca in cui Miranda presentò la sua Nota c'era una situazione di stallo a livello nazionale sul problema di una ampia riforma, del pianeta Università, per ulteriori innovazioni dopo gli interventi legislativi adottati all'inizio degli anni '50 (vedasi questione degli assistenti ordinari) e poi, particolarmente, la legge n.766 del 30.11.73 "Misure urgenti per l'Università" che costituiscono una prima labile, limitata riforma, rispetto alle aspettative delle giovani generazioni. All'epoca, i punti di riferimento legislativo di fondo riguardanti l'Università erano ancora: - "il Regolamento generale dell'Università" emanato con R.D. 6.4.24 n. 674, - il "Testo unico delle leggi sull'istruzione superiore", il R.D. 31.8.1933, n. 1952, il R.D. 4.6.1938, n.1269 "Regolamento sugli studenti, i titoli accademici, gli esami di Stato e l'assistenza scolastica nelle Università e negli Istituti superiori", ormai non adeguati alle realtà emerse nel Paese negli ultimi venti anni.

In effetti all'inizio della nascita della Repubblica ci fu una proliferazione legislativa nel campo universitario che fu prevalentemente dedicata da una parte ad una sorta di necessarie sanatorie, conseguenze di strascichi derivanti dalla progressiva situazione bellica e a flebili interventi innovativi sporadici e meramente di natura sindacale, quali, ad esempio, questioni riguardanti nuove assunzioni, aumenti retributivi et similia, aumento di organici e così via.

Va ricordato che la Nota di Miranda si conclude con il punto 5 dedicato alle "Prospettive future", il cui contenuto ha ovviamente una particolare importanza. A tale proposito va rilevato che le considerazioni svolte da Miranda sono in sostanza collegate ad un importante periodo della Storia del nostro Paese; quello iniziato dopo il secondo conflitto mondiale, con il conseguente nuovo assetto costituzionale che portò, fra l'altro, alla rifondazione dell'intero sistema della pubblica istruzione, a partire dalla base, cioè dalla scuola media fino a quella universitaria. In effetti, cioè, le conclusioni finali di Miranda nella sua Nota sono legate a ciò che ha significato il percorso innovativo fatto dal nostro Paese dall'inizio degli anni '50 fino ad oggi. E ciò, per una valutazione critica in positivo e anche in negativo, occorre avere la forza di esternarlo! Sia pure in maniera contenuta.

Tanto per cominciare è opportuno effettuare, brevemente, un percorso evolutivo circa la legislazione concernente il sistema universitario italiano dall'inizio del XX secolo ad oggi. Al termine del secondo conflitto mondiale, cioè nella primavera del 1945, come già abbiamo ricordato poco prima, i pilastri legislativi concernenti il sistema universitario erano sostanzialmente solo tre, quindi si rileva una scarsa evoluzione del sistema rispetto a quanto certamente era avvenuto e stava avvenendo in altre regioni del mondo, notevolmente più evolute ed avanzate, come del resto si constatò allorché si riapirono, alla fine del conflitto, i canali di comunicazione con le comunità scientifiche internazionali.

Un primo provvedimento legislativo di una certa rilevanza, adottato nel 1946, fu quello dell'istituzione di borse di studio a studenti universitari meritevoli e bisognosi. Ma un intervento di particolare rilevanza, all'epoca, fu il Decreto Legislativo n. 1172 del 7.5.48 concernente l'istituzione di ruoli statali per il personale assistente, tecnico, a carico dei bilanci universitari.

Si ebbe così un primo assetto di una qualche rilevanza, particolarmente per il fatto che venne finalmente sancito il ruolo degli assistenti ordinari, fermo restando che il mancato conseguimento della libera docenza entro dieci anni dalla nomina in ruolo comportava la destituzione e, a richiesta, il trasferimento nel ruolo ordinario degli insegnanti di Istituti delle Scuole Superiori (Licei, Istituti Tecnici, Magistrali, ecc.).

Ciò che va rilevato è che si cominciava ad avvertire la necessità di una forte riforma innovativa, che però non riusciva a decollare e ciò scontava, evidentemente, il pesante stato di ricostruzione del Paese, il notevole cambiamento socio-politico verificatosi a seguito del conflitto mondiale e la necessità di una robusta spinta morale e sociale a tutto campo.

A parte alcuni interventi importanti, ma di natura meramente settoriale, si potrebbe dire che non fu facile e rapido pervenire a decisioni e conseguenti atti legislativi di fondo, cioè basati su riforme di base, significativi nel senso di effettive innovazioni evolutive. Si rileva, per esempio, l'aumento dell'organico dei posti di assistenti e di professori di ruolo, mentre, contestualmente, cominciava l'aumento delle immatricolazioni.

Per mera brevità si accenna ad alcuni rilevanti interventi legislativi riguardanti il settore universitario; precisamente le leggi: - 349/1958 riguardante lo stato giuridico ed economico degli assistenti universitari, - 311/1958 concernente il nuovo stato giuridico ed economico dei professori universitari, - 287/1958 riguardante il personale non insegnante delle Università e degli Istituti di istruzione superiore negli anni 1959-1961, - riguardanti circa 420 posti di assistente di ruolo e 250 posti di professore ordinario; - 1073/1962 e 283/1963 rispettivamente per l'edilizia universitaria e sulla organizzazione e sviluppo della ricerca scientifica; - 62/1967 riguardante un nuovo, importante assetto concernente l'istituzione di nuove strutture, fra cui, in particolare: cattedre, posti di professori incaricati, assistenti ordinari, borse biennali di studio; - 641/1967 sull'edilizia scolastica universitaria; - provvedimenti finanziari attraverso leggi emanate nel periodo degli anni dal 1975 al 1991; - finanziamenti straordinari e Fondi Comunitari per l'edilizia scolastica ed universitaria.

Circa questi ultimi tipi di finanziamenti trasse beneficio anche la nostra Università, ottenendone notevoli per varie necessità fra cui i nuovi insediamenti della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e quello della Facoltà di Economia e Commercio nella zona di Monte S. Angelo. A tal proposito va ricordato che allo stato attuale in detta zona già da tempo si sono insediati: la Facoltà di Economia e Commercio e il Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Cac-

cioppoli", costituito dagli appartenenti alla Facoltà di Scienze MM.FF.NN. Inoltre: - è stato attivato l'edificio dei cosiddetti Centri comuni (Presidenze, Segreterie, Biblioteca centrale della Facoltà di Scienze MM.FF.NN., per la parte allo stato afferente all'insediamento di Monte S. Angelo), strutture informatiche, ecc.); - è stato in gran parte trasferito il Dipartimento di Fisica nell'edificio appositamente dedicato alle attività didattiche; - è in avanzato corso di definizione il complesso dedicato alle attività di ricerca del detto Dipartimento; - inoltre è in avanzata definizione l'ampio complesso dedicato ai Dipartimenti riguardanti le discipline chimiche della precitata Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e si prevede che dovrebbe completarsi entro la fine del 2000.

Va anche rilevato che dei predetti provvedimenti legislativi hanno tratto beneficio anche altre strutture della nostra Università.

E' opportuno accennare che a seguito di una recente decisione del Ministro dell'Università di procedere al decongestionamento dei Mega-Atenei, gli Organi di Governo dell'Ateneo "Federico II", ascoltato il parere della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e dei Dipartimenti interessati, hanno stabilito che nella sede di Monte S. Angelo verranno insediati Dipartimenti di discipline biomolecolari e di biologia cellulare dello sviluppo, che attualmente sono allocati negli storici edifici di Via Mezzocannone, mentre quelli di discipline geologiche e botaniche rimarrebbero nella sede attuale, cioè nel Centro Storico, afferenti, così, ad un altro polo rispetto a quello della zona di Fuorigrotta.

Come si è già accennato, nell'arco degli anni dal 1970 al 1975 proliferò una serie di Leggi riguardanti in genere nuovi provvedimenti per l'Università, in particolare, per il personale docente, quella dal titolo "Misure urgenti per l'Università" (D. L. 73/580) poi convertito nella legge 30.11.73, n. 766, che aprì l'avvio di una riforma di fondo, con tutti i limiti che essa ebbe e di cui si avvertirono poi a posteriori conseguenze in positivo e, bisogna pur dirlo, in negativo!

Sinteticamente, l'elenco delle principali innovazioni è il seguente:

- istituzione di 7.500 posti di professore universitario di ruolo da attivare nell'ambito di tre anni;
- nuove norme per il conferimento dei posti di professore universitario ed inquadramento nei ruoli del personale docente universitario;
- stabilizzazione dei professori incaricati e nuova disciplina per il conferimento degli incarichi di insegnamento;
- 9.000 contratti quadriennali per laureati;
- assegni biennali di formazione scientifica e didattica;
- assegni di studio per gli anni accademici 1974/75 - 1975/76;
- aumento del personale non docente;
- corsi per lavoratori studenti;
- nuove norme per gli organi universitari;
- istituzione di nuove Università;
- nuove procedure per l'edilizia universitaria;
- nuovo trattamento economico del personale docente universitario.

In conseguenza furono assegnati 40 nuovi posti di professore di ruolo alla Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e 45 a quella di Ingegneria della nostra Università. In proposito rinvio alle pagine 24 e 25 della Nota di Miranda.

Vale la pena di effettuare alcune considerazioni in proposito. I posti di assistenti ordinari, diversamente dal passato, erano assegnati alle Facoltà e non più alle cattedre, cioè agli insegnamenti; in altri termini, si pervenne all'omologazione, equiparazione dei posti in discorso a quelli delle cattedre per professori di ruolo, con la ovvia conseguenza che gli assistenti formalmente non furono più assegnati ad un professore di ruolo. Conseguentemente le competenze amministrative riguardanti gli assistenti vennero trasferite dal titolare della cattedra al Consiglio di Facoltà e quindi il rapporto titolare-assistente fu mutato in quello di Consiglio di Facoltà-assistente, quindi in una posizione più legittimista.

Con il D.L.M.P.I. del 20.7.74 fu introdotta la figura dell'assegnista biennale di formazione scientifica e didattica per giovani laureati.

Certamente si trattò di una iniziativa di transizione fra la figura dell'assistente e qualche altra "cosa", quale preparazione di una futura, nuova figura di semi o para docenti! Si trattò di una esperienza unica, "una tantum", che poi non fu reiterata, anche perché erano in gestazione altre strategie, che poi sfociarono in atti legislativi nel 1980.

Tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80 si ebbe una svolta legislativa di rilievo, a seguito del cumulo di iniziative parlamentari avvenute nel decennio precedente, che avevano procurato una legislazione universitaria innovativa, ma non esaustiva. Una vera riforma globale e di svolta precedentemente mai avvenuta, particolarmente per quanto riguardava l'assetto normativo di fondo: anzitutto la sperimentazione dipartimentale, una nuova impostazione della docenza universitaria e l'innovazione delle modalità di reclutazione delle nuove generazioni di studiosi, per la ricerca e la formazione.

Ebbene, alla luce delle precedenti esperienze non positive, fra la fine degli anni '70 e l'inizio di quelli '80 il Parlamento, a seguito di ulteriori iniziative e anche di interventi da parte dei Ministri dell'epoca, riuscì finalmente a pervenire ad una soluzione che apparve la panacea della soluzione universitaria nel nostro Paese, anche se poi, nel tempo, non si è rivelata adeguata agli intenti originari.

In effetti il Parlamento riuscì in tempi rapidi a varare la Legge 28/80 dalla quale nacque, e fu poi emanato, il D.P.R. 382/80. Si trattò di una vera e propria riforma di fondo concernente precipuamente un nuovo assetto della docenza, articolata in due fasce: professori ordinari, professori associati, la istituzione ex novo del ruolo dei ricercatori, e poi i problemi della ricerca scientifica, fra cui l'istituzione del Dottorato di ricerca, la Sperimentazione organizzativa e didattica, concernente l'istituzione dei Dipartimenti, Centri, Consorzi, ecc..

Non c'è dubbio che finalmente ci si trovò di fronte ad una vera e propria Riforma che ha cambiato l'assetto universitario e sulla quale andrebbe effettuata una puntuale valutazione. Ma non è questa la sede adatta! Forse le descrizioni seguenti ed alcune osservazioni, peraltro di settore, possono essere utili, in certi limiti, per una valutazione globale. Alla luce di quanto è avvenuto si può sere-

namente e obiettivamente rilevare che Miranda nella ultime righe della sua Nota aveva preconizzato qualcosa, anche se in maniera piuttosto marcata rispetto a quanto si è poi avverato.

Eppure va rilevato, dopo circa un ventennio, che, con l'andare del tempo, la soluzione allora introdotta non ha funzionato in maniera opportuna. Ed in vero, come si rileva spesso dalla stampa ci sono continue petizioni circa "la possibilità di affrontare un concorso che promuova, per tutti coloro che li hanno acquisiti, i meriti didattici e scientifici maturati in questo lunghissimo tempo. Essi hanno retto e continuano a reggere il maggior peso didattico, tenendo di fatto in piedi l'Università. Lo fanno per spirito di abnegazione, per eroismo personale e per il rigore culturale e scientifico cui sono stati temprati dai loro maestri. Essi, in oltre diciotto anni, hanno formato generazioni di giovani". Comunque nel luglio del 1998 è stata finalmente approvata dal Parlamento la nuova legge sui meccanismi di reclutamento dei docenti negli Atenei italiani: i primi bandi, sono stati recentemente pubblicati. Il testo della nuova legge "trasferisce interamente alle Università l'espletamento delle procedure per la copertura dei posti vacanti per la nomina in ruolo dei professori e ricercatori". Con questa riforma l'espletamento delle procedure per la copertura dei posti vacanti e per la nomina in ruolo dei professori: ordinari, associati e dei ricercatori, dovrebbe sveltirsi fortemente.

Non posso chiudere questa parte senza riferimento a qualche ricordo di carattere personale. Il decennio che va dal '68 all'81 fu certamente una fase di transizione e di rinnovamento nella Scuola in genere, nell'Università, non solo in Italia, come è ben noto, ma anche in molti altri paesi del Mondo: Stati Uniti, Francia, Oriente, ecc.

E qui tanti sono i ricordi personali in alcuni frangenti avvenuti, che hanno fatto parte della nostra vita! Ricordo incontri e scontri all'interno non solo della componente studentesca con la quale giornalmente bisognava misurarsi, ma anche, e direi, soprattutto, con i Colleghi più giovani che avvertivano modificazioni di fondo e aperture concrete per il futuro; ricordo, altresì, le irruzioni studentesche durante le lezioni, oppure il blocco delle attività didattiche e scientifiche, e così via!

Va ricordato, anche, che nel periodo '69-'70 (nel quale svolsi la carica di Preside della Facoltà), vi fu l'introduzione, innovativa, delle adunanze pubbliche del Consiglio di Facoltà, con l'esclusione delle parti che riguardavano problemi concernenti questioni di natura personale. Fu una iniziativa unica nel nostro Paese, che venne poi adottata da altri Atenei. In una di queste adunanze, che si tenevano nell'Aula dell'allora Istituto di Chimica in Via Mezzocannone 4, si presentarono anche alcuni Marines U.S.A. che, evidentemente, erano di passaggio e, nel folclore napoletano, inserirono anche le attività della nostra Facoltà!

A questo punto - seguendo l'intento che mi sono posto - mi riallaccio al punto 5 (Prospettive future) della descrizione della Nota di Miranda e quindi al-

la situazione esistente a fine 1976, e mi propongo di effettuare, anzitutto, una esposizione delle attività svolte dall'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dall'1.11.76 fino al 31.12.82, cioè allorché esso fu sciolto, e poi di quelle del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dall'1.1.83 (data della sua fondazione) a tutt'oggi(3).

Forse é opportuno rilevare che, in effetti, nella parte precedente e, in qualche modo, nel prosieguo, viene fatto un confronto su ciò che è avvenuto e quanto esposto da parte di Miranda nel punto 5 della sua Nota.

### **3 - L'ISTITUTO DI MATEMATICA DELLA FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI. IL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA ED APPLICAZIONI DELL'UNIVERSITA' E ALTRE STRUTTURE MATEMATICHE AFFERENTI AL SISTEMA UNIVERSITARIO A NAPOLI.**

Le attività dell'Istituto per il periodo 1976/77-1982/83 si svolsero, si potrebbe dire, secondo un processo routinario, nell'attesa, ormai generale, di un cambiamento che molti auspicavano ed attendevano, ma che ritardava ad emergere anche se, come si è detto, le trasformazioni e le innovazioni legislative camminavano nelle direzioni ormai formulate o in corso di formulazione. Comunque il clima era certamente polemico e fortemente dialettico, come già rilevato da Miranda nella sua Nota. Le tensioni già emerse negli anni '60/'70, e lucidamente descritte da Miranda, erano ovviamente il segnale di una mutazione generazionale che esprimeva la necessità di una compartecipazione collettiva, delle varie componenti, ai problemi delle strutture, che Egli saggiamente aveva accettato, come risulta dalla detta Nota (pagg. 30-31). Ormai, anche alla luce delle trasformazioni avvenute legislativamente nella prima metà degli anni '70 (vedere legge 766/73 sulle Misure urgenti per l'Università e la legge 29/75) il clima fu sempre più quello della partecipazione collettiva degli appartenenti all'Istituto.

Ormai si era creato un fermento dilagante rivolto a pervenire quanto prima a mutazioni legislative di profonda valenza rispetto a quelle fino ad allora emerse, come poi di fatto si verificò agli inizi degli anni '80 con la citata legge 28/80 e il correlato D.P.R. 382/80.

Ebbene, uno dei punti focali della riforma di cui alle predette norme di legge, fu la "Sperimentazione organizzativa e didattica", della quale fece parte la costituzione della struttura dipartimentale, che era stata il punto centrale della dialettica sviluppatasi negli anni '70.

Va ricordato che i matematici si attivarono tempestivamente per l'attuazione di strutture dipartimentali nei settori della matematica e dell'informatica con la partecipazione di matematici - afferenti a diverse Facoltà (Scienze MM.FF.NN, Ingegneria, Architettura) - fisici, ingegneri di detti settori. Ci fu

un notevole fervore, con molteplici incontri e riunioni che si svilupparono lungo l'arco di oltre un anno.

In un primo momento si era ventilata l'istituzione di un Dipartimento costituito non solo dai Matematici delle Facoltà di Scienze e di Ingegneria, ma anche di Architettura, nonché degli informatici, ed altri affini. A seguito di una notevole dialettica e del coinvolgimento della Commissione di Ateneo, nonché degli Organi di Governo dell'Università, alla fine si pervenne alla costituzione del Dipartimento di Matematica e Applicazioni intitolato a Renato Caccioppoli, come del resto era avvenuto negli anni '70 per l'Istituto di Matematica, su deliberazione del Consiglio di Facoltà di Scienze MM.FF.NN. adottata il 15.3.1971 e poi diventata esecutiva con l'anno accademico 1971/72. Nel Dipartimento afferirono, e tuttora afferiscono, docenti, ricercatori, e personale non docente appartenente alle Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e di Ingegneria. Si tratta di uno dei più robusti Dipartimenti dell'Ateneo Federico II.

In riferimento al nuovo insediamento del Dipartimento di Matematica ed Applicazioni vale la pena ricordare che man mano che l'opera andava a realizzarsi si aumentava una certa resistenza a rinviare o addirittura a disconoscere l'opportunità del trasferimento. Emergevano varie motivazioni che apparentemente sembravano attendibili. Ricordo riunioni molto agitate proprio nell'ambito del settore matematico della Facoltà!

Non c'è dubbio che si trattava di una sorta di inconscio, dovuto al rilascio di una sede storica e affettiva, che però non poteva più essere utilizzata, alla luce delle nuove situazioni. Non nascondo che nella qualità di vertice dell'Ateneo fui costretto a una pesante durezza che portò a risolvere tale ambascia. Comunque, ciò fu positivo poiché dalla dialettica apertasi emersero alcune obiettive esigenze che furono attuate attraverso la realizzazione di ulteriori spazi necessari per lo svolgimento delle attività didattiche e scientifiche.

La sede del Dipartimento fu articolata nei locali dell'ex Istituto di Matematica in Via Mezzocannone n. 8, nei quali svolgevano attività docenti e non docenti dell'ex Istituto, afferenti alla Facoltà di Scienze MM.FF.NN., e in locali della Facoltà di Ingegneria nei quali svolgevano attività docenti e non docenti afferenti ad essa. La sede amministrativa fu allocata negli stessi ambienti già appartenenti all'ex Istituto di Matematica.

Va peraltro fatto presente che allo sviluppo delle attività scientifiche e didattiche matematiche hanno contribuito anche il Dipartimento Matematico Statistico, l'Istituto di Matematica della Facoltà di Architettura, nonché due Organi di ricerca del C.N.R.: precisamente l'Istituto per Applicazioni della Matematica istituito formalmente nel 1981, diretto dal Prof. Mario Rosario Occorsio, e il Centro di Ricerche per il Calcolo Parallelo e i Supercalcolatori istituito e attivato il 23.5.1994, diretto dal Prof. Almerico Murli. Queste due strutture, sul piano della ricerca matematica, sono notevolmente integrate con le attività scientifiche del Dipartimento di Matematica ed Applicazioni. A tale proposito va detto che

a seguito del recente riordino del C.N.R. dette istituzioni potrebbero essere ristrutturare.

E' opportuno ricordare che la Facoltà di Scienze MM.FF.NN. nell'attuale secolo ha avuto come Presidi di estrazione matematica: Carlo Miranda 1958-1968, Carlo Ciliberto 1968-1975, Guido Trombetti dal 1993 a tutt'oggi, e, inoltre, Carlo Ciliberto è stato: - componente del Consiglio di Amministrazione dell'Ateneo dal 1976 al 1981, - Rettore dell'Ateneo dal 1° novembre 1981 al 31.10.1993.

Va anche ricordato l'impegno a latere di docenti appartenenti all'Istituto o al Dipartimento riguardo a strutture scientifiche nel settore matematico.

Dell'Ufficio di Presidenza dell'Unione Matematica Italiana sono stati: Presidente Guido Stampacchia dal 1967 al 1973, Vice Presidenti: - Carlo Miranda dal 1958 al 1964, - Carlo Sbordone dal 1997 a tutt'oggi; della Commissione Scientifica di detta Unione hanno fatto parte: - Carlo Miranda dal 1949 al 1973 ininterrottamente, - Mario Curzio per il periodo 1976-82, - Paolo de Lucia per il periodo 1982-1991, - Salvatore Rionero per il periodo 1985-1988, - Carlo Sbordone per il periodo 1991 a tutt'oggi, - Francesco De Giovanni dal 1997 a tutt'oggi.

Sono stati membri dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica: - Mario Curzio dal 1969 al 1977, - Paolo de Lucia dal 1989 al 1994 - Ciro Ciliberto dal 1990 a tutt'oggi, - Guido Trombetti dal 1995 a tutt'oggi.

Inoltre: - Mario Curzio dal 1969 al 1976 è stato componente del Comitato per la Matematica del C.N.R., - Carlo Ciliberto dal 1976 al 1994 è stato componente, nonché Presidente, del Comitato per la Matematica del C.N.R..

Vanno poi anche ricordati: - gli Accademici dei Lincei: Renato Caccioppoli, Carlo Miranda, Giuseppe Scorza Dragoni, Franco Cimmino, Luigi Salvadori, Salvatore Rionero; - i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli: Alfredo Franchetta, Mario Curzio, Carlo Ciliberto, Antonio Avvantaggiati, Luigi Salvadori, Mario Troisi, Salvatore Rionero, Antonio Romano, Antonio Zitarosa, Paolo de Lucia, Ciro Ciliberto, Carlo Sbordone, Guido Trombetti, Renato Fiorenza, Angelo Alvino, Albino Canfora, Luigi Maria Ricciardi, Renato Grassini, Luciano Carbone, Francesco De Giovanni, Francesco Mazzocca, Achille Basile; - i soci dell'Accademia Pontaniana: Carlo Miranda, Renato Caccioppoli, Carlo Tolotti, Alfredo Franchetta, Federico Cafiero, Guido Zappa, Francesco Stoppelli, Donato Greco, Carlo Ciliberto, Carlo Sbordone.

Notevolissimi i collegamenti internazionali quali, fra i più recenti, quelli di: - M. Curzio, F. De Giovanni con ricercatori di vari Paesi, quali Germania, Ucraina, USA, Gran Bretagna, Irlanda, Canada, Israele; particolarmente importante la collaborazione con le Università di Kiev (Ucraina), Mainz (Germania), Galway (Irlanda), da cui sono nati numerosi articoli scientifici in collaborazione, una monografia, un convegno internazionale; - A. Alvino, C. Sbordone, G. Trombetti con Lions Pierre Louis (Paris) Accademico di Francia e Medaglia

Field, Luc Tartar (Stati Uniti d'America); - S. Rionero con: il Prof. Joseph dell'Università del Minnesota, il Prof. Horgan dell'Università della Virginia, il Prof. Rajgopal della Università di Huston, il Prof. R. Knops dell'Università di Edimburgo (Heriett-Walt), il Prof. B. Straughan dell'Università di Glasgow ed i Proff. Flavin e Mc-Carthy dell'University College Galway, il Prof. P. L. Christiansan del Politecnico di Copenaghen, Stan-Chirita dell'Università di Iasi; - E. Orecchia con A. V. Geramita (Queen's University, Kingston 'Canada), - D. Olanda con A. Beutel Spacher (Università di Gissen), - G. Lunardon con J. A. Thas (Università di Gent in Belgio); - M.R. Occorsio con cospicui rapporti scientifici svolti in Italia, Romania, Ungheria, Olanda, USA, Canada, Jugoslavia, Germania, Russia; - A. Murli collabora con vari centri di ricerca internazionali fra i quali: il Numerical Algorithm Group di Oxford, la Divisione di Matematica e Computer Science dell'Argonne National Laboratory dell'Università di Chicago e CACR del California Institute of Thecnology di Pasadena in California; - L.M. Ricciardi: - fin dal 1978 ha una collaborazione scientifica con il Prof. Shunsuke Sato dell'Università di Osaka (Giappone) col quale ha condotto numerose pubblicazioni congiunte; - dal 1982 ha in atto una collaborazione scientifica con il Prof. Peter Lansky dell'Accademia Ceca delle Scienze (Praga, Repubblica Ceca), nonché dal 1.1.98 ha in atto un accordo ufficiale di cooperazione scientifica tra l'Università di Napoli Federico II e la Japan Science and Technology Corporation.

#### **4 - STRUTTURE PER LO STUDIO E LA RICERCA**

Il Dipartimento rimase, come prima descritto, fino al termine dell'anno accademico 1991/92, allorché avvenne il trasferimento nella nuova sede di Monte S. Angelo, nell'area dedicata, come già detto, alla nuova sistemazione delle Facoltà di Economia e Commercio e di Scienze MM.FF.NN. La situazione così mutò radicalmente dal punto di vista funzionale sia per un ampio aumento degli spazi disponibili sia per l'organizzazione stessa che poté migliorare notevolmente sotto ogni aspetto.

Anzitutto, per quanto riguarda il primo biennio dei Corsi di laurea in Matematica e in Fisica, l'attività didattica viene svolta nell'aulario della sede di Monte S. Angelo, mentre quella didattica per il secondo biennio di Matematica si svolge nella sede del Dipartimento, nella quale si effettuano, ovviamente, anche le attività scientifiche e tutte quelle di carattere amministrativo e organizzativo. Detta sede si articola: - in aulette, in studi per docenti e ricercatori, - in ambienti dedicati all'attività amministrativa e contabile del Dipartimento, alla Direzione del Consiglio di Corso di Laurea, al Centro Stampa, al Centro di Calcolo, al Presidio amministrativo, al Presidio tecnico, alla Segreteria didattica, alla Sala riunioni.

L'attività didattica di discipline matematiche degli altri corsi di laurea della Facoltà di Scienze (Chimica, Fisica, Scienze Biologiche, Naturali e Geofisiche) continua ad essere espletata nella sede di Via Mezzocannone, 8. In essa è tuttora attiva la storica "Sala dedicata al matematico Giuseppe Battaglini", già punto di riferimento e di confluenza quotidiana dei docenti e dei rispettivi collaboratori, dedicata alle discussioni di lavoro e di ricerca. E' auspicabile che detta sala, - al di là della futura utilizzazione degli spazi attualmente ancora dedicati alle attività didattiche matematiche per i corsi di laurea in Chimica, Chimica Industriale, Scienze Biologiche, Scienze Geologiche -, in futuro rimanga assegnata al Dipartimento di Matematica e Applicazioni per i predetti motivi storici.

Sempre per quanto riguarda la Sede di Mezzocannone, va ricordato il cosiddetto ex Gabinetto di Analisi Superiore, già studio di lavoro di Mauro Picone. I locali di tale sede vennero adibiti a biblioteca, con una interessante sezione antiquaria, nonché per conservare preziosi modelli matematici. Si ricorda che, per iniziativa e sensibilità di Docenti che si occupano di Storia della Matematica, particolarmente di Luciano Carbone, nell'ultimo decennio si è proceduto a far riparare detti modelli e cimeli, nonché a creare un interessante, opportuno spazio museale. Attenzione particolare meritano alcune serie di fotografie esposte nel cosiddetto coretto, dei suddetti spazi, nonché di alcuni precitati modelli. Tale serie è allegata a questa Nota, nell'Appendice A. Peraltro ricordo la Nota di Luciano Carbone, Giuseppe Cardone, Franco Palladino del Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche in Napoli Vol. LXIII, (1996) pp.33, 65 (2).

Il settore della Facoltà di Ingegneria afferente al Dipartimento è allocato nelle sue sedi di Piazzale Tecchio e di Via Claudio.

Da quanto esposto si può ben dire che la situazione logistica dopo il trasferimento è notevolmente migliorata.

#### 4.1 - BIBLIOTECA "CARLO MIRANDA"

Circa questo argomento anzitutto va evidenziata la nuova sede della Biblioteca, soprattutto per il semplice e funzionale dispositivo non solo, ma anche per quanto riguarda l'organizzazione, la capienza e la ricezione. Quanto all'organizzazione, va detto che non ci sono novità di rilievo, in quanto l'assetto di tale struttura è quello a suo tempo realizzato da Miranda (vedere le pagine 21 e 22 della sua Nota) e non poteva non essere così, tenuto conto della rinascita di questa importante struttura da lui ripristinata e perseguita con tenacia, impegno e professionalità. L'impronta così data ha fatto sì che ormai l'organizzazione ha continuato e continua a funzionare in maniera esemplare. La Biblioteca peraltro beneficia anche di molte Riviste di scambio con quella di Ricerche di Matematica del Dipartimento di Matematiche e Applicazioni "R. Caccioppoli"(3). Fatto

nuovo è stata la deliberazione del Consiglio di Dipartimento di intitolare la Biblioteca a Carlo Miranda. A tale proposito va ricordato l'amore e l'impegno con i quali Egli curò lo sviluppo della "sua" Biblioteca, ponendo le basi che l'hanno ormai resa tra le più importanti nel settore matematico a livello nazionale.

La situazione aggiornata dello stato della Biblioteca alla data del 30.1.98 è la seguente:

- numero volumi: 43.275,
- titoli dei Periodici: 648, di cui 405 in corso o completi,
- numero 78 collezioni in prosecuzione,
- numero ambienti: 5,
- Opere date in lettura giornaliera: circa 1.000 al mese,
- Opere date in prestito: circa 400 al mese,
- tre sale di lettura per un totale di 133 posti.

Non è stato necessario riservare né sale né posti di lettura per i docenti o i ricercatori, in quanto questi dispongono di appositi studi.

Sono 135 le Riviste che pervengono in cambio con quella di "Ricerche di Matematica".

Il personale occupato nei vari livelli è di 7 unità.

La Biblioteca si estende su una superficie di circa 680 mq.

Le presenze giornaliere ammontano a circa 300 studenti, docenti e ricercatori, non solo del Dipartimento ma di tutto il Polo Scientifico. Significativa, inoltre, è la presenza di studiosi, ricercatori e studenti provenienti da altri Atenei, soprattutto meridionali.

Attualmente, l'orario di apertura al pubblico va dalle ore 9.00 alle 17.00 dal lunedì al venerdì. Sabato solo antimeridiano.

Alla luce di quanto esposto si può ben affermare che questa struttura costituisce l'orgoglio ed uno dei punti di forza del Dipartimento. Ulteriori informazioni sono riportate nella Relazione esposta dal Prof. Pasquale Renno al termine del suo mandato di Direttore del Dipartimento, rintracciabile nell'archivio del Dipartimento.

Purtroppo va rilevato sul piano funzionale che l'ubicazione dei locali della Biblioteca non è certamente felice, peraltro tenuto conto delle difficoltà di controllo circa il notevole patrimonio librario. Va poi aggiunto che nella già citata sede di Via Mezzocannone 8, esiste una Sezione antiquaria del Dipartimento.

Va poi fatto presente che proprio recentemente è stata aperta la Biblioteca Centrale della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. nei locali dei Centri comuni nei quali sono stati trasferiti i periodici in corso fino al 1980, quelli cessati e quelli in lingua cirillica. In sostanza nella Biblioteca "Carlo Miranda" rimarranno essenzialmente tutti i libri per la didattica ai fini della consultazione. Contestualmente si sta provvedendo alla ristampa dei nuovi cataloghi cartacei.

#### 4.2 - PERSONALE NON DOCENTE

Rispetto alla situazione esistente all'epoca della presentazione della Nota di Miranda (inizi 1977) l'organico del personale tecnico-amministrativo è notevolmente aumentato, soprattutto in conseguenza dell'istituzione del Dipartimento, che peraltro è dislocato tuttora su due sedi, afferenti alle Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e di Ingegneria. Va tenuto conto del fatto che i servizi a cui il personale è dedicato rimangono tuttora i seguenti: 1) Biblioteca, 2) Amministrazione, 3) Direzione, 4) Dattilografia, 5) Centro fotocopie e Fax, 6) Segreteria didattica, 7) Archivio, ecc.

Fatto positivo rispetto alla precedente situazione logistica è che per la gestione delle aule d'insegnamento per il primo biennio degli studi vi provvede appositamente personale ausiliario centralizzato, cioè non facente parte del complesso del personale ausiliario afferente al Dipartimento.

La situazione dell'organico del personale non docente del Dipartimento è nel complesso notevolmente migliorata rispetto a quella esposta da Miranda nella sua Nota e ciò si deve prevalentemente all'intervento dei vari Direttori del Dipartimento succedutisi. Attualmente detto organico è costituito da: 9 amministrativi, 6 bibliotecari, 7 tecnici e 8 ausiliari (purtroppo questo tipo di personale va sempre più assottigliandosi!). Quattro unità di personale non docente sono dislocate nella sede di Via Claudio della Facoltà di Ingegneria (1 assistente contabile, 1 agente amministrativo, 2 operatori tecnici); esse fanno capo alla Facoltà di Scienze e 2 fanno da supporto alla Segreteria della Facoltà di Ingegneria.

Concludendo questo paragrafo, va rilevato che il personale, peraltro esiguo rispetto alla struttura, è molto efficiente e in buona parte collabora con entusiasmo.

#### 4.3 - PERSONALE DOCENTE

Va preliminarmente detto che in base al D.P.R.382/80 per quanto riguarda la docenza universitaria fu introdotto un nuovo assetto(3) in base al quale "il ruolo dei professori universitari comprende le seguenti fasce:

- a) professori straordinari e ordinari;
- b) professori associati".

"Non é consentito il conferimento di incarichi di insegnamento".

Ricordo che alla data della presentazione della Nota di Miranda la situazione dell'organico dei posti di ruolo di professori straordinari e ordinari era la seguente:

Posti di ruolo per insegnamenti di matematica nella Facoltà di Scienze MM.FF.NN.: 19, di cui 18 coperti e precisamente(4):

Algebra: Mario Curzio, Gianfranco Panella, Gabriella Corsi Tani;

Analisi Matematica: Carlo Miranda, Federico Cafiero, Carlo Ciliberto, Paolo De Lucia(5), Albino Canfora;

Calcolo Numerico e Programmazione: Renato Vinciguerra;

Geometria: Alfredo Franchetta, Vittorio Dalla Volta, Sandro Buoncristiano, Carlo Traverso;

Istituzioni di Matematiche: Maria Laura Benevento Calabrese, Laura Castellani, Maria Grazia Cazzani Neri;

Meccanica Razionale: Carlo Tolotti, Salvatore Rionero, Antonio Romano.

Tale situazione rimase per gli anni accademici 1976/77 e 1977/78.

A seguito del trasferimento: della Prof.ssa Gabriella Corsi Tani a Bologna a decorrere dall'1.11.78 e della Prof.ssa Maria Grazia Neri Cazzani a Pavia a decorrere dell'1.1.79 si resero così liberi due posti e quindi ne rimasero 16 coperti e 3 scoperti.

Purtroppo il 7.5.80, dopo una lunga, dolorosa degenza, si ebbe il decesso di Federico Cafiero. Ne derivò così una gravissima perdita sotto vari profili sul piano scientifico, didattico, di politica della ricerca e delle istituzioni.

Nel ricordare la Commemorazione su Cafiero elaborata da Miranda, pubblicata nella Serie IV-Vol. XLVIII-Anno CXX(1980/81), dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, mi limito a citare tre significativi passi:

"L'opera di Cafiero, che rivela un analista di acume e di singolare ampiezza di vedute, fa onore all'Analisi Italiana e alla Scuola Napoletana"(6).

"Contribuì molto anche alla preparazione scientifica dei giovani e a lui si appoggiarono nelle ricerche molti dei nostri attuali colleghi".

"Dal 1966 fino alla sua morte fece parte prima del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione e poi del Consiglio Nazionale Universitario. E nell'espletamento del suo mandato, dette prova, accanto al suo spirito critico, di un innato senso giuridico e di una imparzialità che gli valsero rispetto e l'ammirazione dei colleghi".

Nel frattempo, a seguito di nuovi provvedimenti di legge furono assegnati dal Ministero della P.I. nuovi posti(7) di professore ordinario alla Facoltà di Scienze MM.FF.NN. del nostro Ateneo di cui, in particolare, 7 al settore di Matematica, e così in totale il numero complessivo dei posti in discorso risultò essere 26.

I posti disponibili (undici) furono così utilizzati per l'a.a.1980/81(8):

Algebra Superiore: Aldo De Luca 1980/85(9)

Analisi Matematica I: Antonio Zitarosa 1980/30.11.96(10)

Analisi Matematica II: Carlo Sbordone 1980/81.....

Analisi Superiore: Angelo Alvino 1980/81.....

Calcolo Numerico e Programmazione I: Mario Rosario Occorsio 1980/81....

Geometria I: Giuseppe Canuto 1980/81(9)

Geometria II: Ferruccio Orecchia 1980/83(9), Franco Ghione 1980/82(9)

Istituzioni di Algebra Superiore: Lino Di Martino 1980/82(9)

Istituzioni di Analisi Superiore: Guido Trombetti 1980/81.....

Meccanica Razionale: Giovanni Paolo Galdi 1980/85(9)

Va puntualizzato che il Prof. Zitarosa fu chiamato alla cattedra già ricoperta dal Prof. Cafiero, mentre gli altri 10 docenti, su indicati, furono chiamati su posti assegnati dal Ministero competente in base all'ultima tranne di posti nuovi di cui all'art.1 della legge 766/73 (vedere il punto 2 della presente Nota).

Nel prosieguo sono peraltro avvenuti i seguenti mutamenti.

A seguito di trasferimenti, si resero liberi tre posti, due dei quali furono utilizzati per trasferimento:

Geometria Algebrica; Ciro Ciliberto 1981/85(9)

Istituzioni di Matematica: Giorgio Nicoletti 1981/83(9)

Intanto già da qualche tempo si andava maturando l'opportunità di irrobustire i settori dell'Analisi Numerica e dell'Informatica. All'uopo il settore Fisica della Facoltà si dichiarò disponibile a cedere temporaneamente al settore Matematico un posto, poi da restituire, nell'intento di utilizzarlo per la detta esigenza. E così esso fu ricoperto per trasferimento come segue:

Teoria dell'Informazione: Luigi Maria Ricciardi 1981/82, (per trasferimento dall'Università degli Studi di Salerno).

Intanto si ebbero: il 3.3.1982 il decesso del Prof. Vittorio Dalla Volta e poi il 28.5.82 quello improvviso del Prof. Carlo Miranda. La perdita di Miranda ovviamente fu gravissima! Essa indubbiamente ha segnato uno spartiacqua purtroppo irreparabile, che di certo ha fortemente modificato la vita della nostra struttura, peraltro nel momento delle trasformazioni in atto a seguito di avvenimenti innovativi nell'Università e, in particolare, del passaggio alla nuova struttura dipartimentale. Certamente ciò ha di fatto prodotto una mutazione generazionale all'interno della struttura!

Nel ricordare le Commemorazioni su Miranda effettuate da: - Luigi Amerio per l'Istituto Lombardo, - Antonio Avantaggiati per il Bollettino dell'U.M.I., - Jaurès Cecconi per gli Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, - Gianfranco Cimmino e Giuseppe Scorza Dragoni negli Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, - Enrico Magenes per gli Annali di Matematica Pura ed Applicata, - Giuseppe Scorza Dragoni, Rendiconti dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematiche, - Giuseppe Geymonat negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, - Donato Greco nella Collana "Profili e Ricorsi" della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, XII (1993), mi limito a ricordare due significativi passi di quest'ultima: "Chi aveva la ventura di conoscerlo ne apprezzava la saggezza, la probità, l'impegno civile e soprattutto le grandi doti di tolleranza e di profonda umanità non disgiunte, peraltro, da un fine senso di humor". "Egli con il suo fiuto finissimo di scopritori di talenti, reclutava gli allievi fra gli studenti

più valorosi e li seguiva amorevolmente, incoraggiandoli e spronandoli senza sosta. Il suo appoggio nell'ambito dell'Istituto non era però riservato solo ai suoi allievi diretti. Egli era sempre e totalmente disponibile verso chiunque si rivolgesse a Lui per aiuto e consiglio. Foltissima é perciò la schiera dei suoi discepoli, fra i quali oggi se ne annoverano di giovani, di meno giovani e di anziani, che hanno ricevuto alti riconoscimenti scientifici, o ricoprono prestigiose cariche accademiche".

Nell'anno 1982/83 si ebbero i seguenti movimenti:

- Oltre i predetti due decessi, si ebbero i trasferimenti in altra sede: della Prof.ssa Maria Laura Benevento (alla Facoltà di Ingegneria di Napoli), dei Professori Lino Di Martino e Franco Ghione, ragion per cui rimasero disponibili 5 posti, di cui uno fu utilizzato ricoprendolo per trasferimento come di seguito riportato:

Analisi Matematica I: Luciano Carbone 1982/83....(11)

In tal modo i posti coperti furono 22, con 4 scoperti.

Nell'anno 1983/84 si ebbero i seguenti movimenti:

- Il Prof. Angelo Alvino fu trasferito sull'insegnamento di Istituzioni di Analisi Superiore.
- Si resero liberi 2 posti in conseguenza dei trasferimenti del Prof. Giorgio Nicoletti all'Università di Bologna e del Prof. Ferruccio Orecchia all'Università di Genova, ragion per cui i posti ricoperti furono 20 e rimasero disponibili 6 posti.

Nell'anno 1984/85 il Prof. Carlo Tolotti in data 1.3.84 fu posto in pensione, ragion per cui per detto anno accademico risultarono liberi 7 posti.

Sempre nell'anno 1984/85 si ebbe il trasferimento interno del Prof. L. M. Ricciardi dall'insegnamento di Teoria dell'Informazione a quello di Statistica Matematica.

Nell'anno 1985/86 si ebbero i seguenti movimenti:

- Si resero liberi altri 3 posti in conseguenza dei trasferimenti del Prof. Ciro Ciliberto all'Università di Roma Tor Vergata, del Prof. Aldo De Luca all'Università di Roma "La Sapienza", del Prof. Paolo Giovanni Galdi all'Università di Ferrara; uno di essi fu ricoperto a seguito di vincita di concorso come di seguito riportato:
  - Calcolo numerico e programmazione: Almerico Murli 21.10.1986/....
- Conseguentemente risultarono coperti 17 posti e liberi 9 posti.

Nell'anno 1986/87 furono nominati, a seguito di chiamata per vincita di concorso o per trasferimento da altra sede (12):

- Fisica Matematica: Franco Bampi 1986/90(9)
- Geometria: Francesco Mazzocca 1986/93
- Geometria I: Ferruccio Orecchia 1986/87....
- Istituzioni di Geometria Superiore: Domenico Olanda 1986/87.....
- Matematiche Complementari: Guglielmo Lunardon 1986/93

- Meccanica Razionale: Renato Grassini 1986/87.....

Inoltre il Prof. Alfredo Franchetta andò in fuori ruolo per limiti di età alla data dell'1.11.86, ragion per cui risultarono complessivamente coperti 22 posti e disponibili 4 posti.

Nell'anno 1987/88 furono assegnati al settore di Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. altri 4 nuovi posti di ruolo, quindi il numero complessivo di essi salì a 30. Conseguentemente si ebbero i seguenti movimenti, a seguito di chiamata per vincita di concorso:

- Algebra: Giorgio Busetto 1987/31.10.91(9), Francesco De Giovanni 1987/....
- Istituzioni di Fisica Matematica: Domenico Fusco 1987/90(9)
- Istituzioni di Matematiche: Nicola Melone 1987/89(13), Alberto Perelli 1987/91(10), Gianna Stefani 1987/ .....
- Geometria I: Luca Chiantini 1987/92(9).

Conseguentemente risultarono così coperti tutti i 30 posti disponibili.

Sempre nell'anno 1987/88 si ebbe il trasferimento interno del Prof. L. M. Ricciardi dall'insegnamento di Statistica Matematica a quello di Calcolo delle Probabilità; attualmente afferisce al settore scientifico disciplinare "Probabilità e Statistica Matematica".

Nell'anno 1988/89 non ci furono situazioni nuove, tranne il fatto che dalla data dell'1.11.89 il Prof. Renato Vinciguerra andò fuori ruolo, ragion per cui si rese libero un posto che, messo tempestivamente a trasferimento, fu ricoperto, a partire dall'1.11.89, dalla Prof.ssa Elvira Russo(14), sulla cattedra di Analisi Numerica.

Nell'anno accademico 1989/90 non ci furono situazioni nuove. Nel frattempo si erano resi disponibili al settore di Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. 3 nuovi posti di ruolo, tal che il numero complessivo dei posti salì a 32; nell'anno 1990/91 essi furono, insieme al posto lasciato libero a seguito del trasferimento del Prof. Franco Bampi, all'Università di Roma "La Sapienza", così utilizzati per trasferimento o a seguito di chiamata per vincita di concorso:

- Algebra Superiore: Claudia Metelli 1990/...
- Analisi Matematica II: Nicola Fusco 1990/95(9)
- Istituzioni di Matematica: Pasquale Buonocore 1990/...(10)
- Meccanica Razionale: Remigio Russo 1990/92

ragion per cui tutti i 32 posti risultarono coperti.

Intanto si ebbero le seguenti movimentazioni:

- il Prof. Franco Bampi si trasferì dall'1.11.90 all'Università di Roma "La Sapienza",
- la Prof.ssa Laura Castellano il 15.5.91 si pose prematuramente in pensione,
- il Prof. Giorgio Busetto si trasferì all'Università di Venezia in data 1.11.91,
- il Prof. Alberto Perelli si trasferì all'Università di Genova dall'1.11.91,

- il Prof. Remigio Russo si trasferì alla II Università di Napoli a partire dall'1.11.92, unitamente al posto.

Va aggiunto che il Prof. Alfredo Franchetta, già in fuori ruolo dall'1.11.86, andò in pensione per limiti di età alla data dell'1.11.91. Pertanto rimasero disponibili 6 posti, su uno dei quali (quello già ricoperto dalla Prof.ssa Castellano) venne trasferita su Istituzioni di Matematica, a partire dall'1.11.92, la Prof.ssa Ester Giarrusso proveniente dall'Università di Salerno(15).

Rimasero così disponibili 5 posti.

Intanto il Prof. Francesco Mazzocca si trasferì, con il posto, alla II Università di Napoli in data 1.11.93, ragion per cui rimasero disponibili alcuni posti. A partire dall'anno accademico 1993/94 il Prof. Lunardon fu trasferito a Istituzione di Geometria Superiore su uno dei posti disponibili del settore Geometria.

Nell'anno 94/95 si ebbero i seguenti movimenti:

- I professori Nicola Fusco e Nicola Melone si trasferirono a partire dall'1.11.95 rispettivamente all'Università di Firenze e alla Seconda Università di Napoli, mentre, a seguito di espletamento di concorso, furono nominati, sempre dall'1.11.95, il Prof. Giuseppe Mulone e la Prof.ssa Francesca Visentin, rispettivamente su due posti disponibili del settore disciplinare Fisica Matematica, quindi i posti di prima fascia ricoperti risultarono 26 e quelli disponibili 6.

A partire dall'anno 1995/96 il Professore Pasquale Buonocore fu trasferito ad Analisi Matematica, utilizzando un posto disponibile di tale settore, sostituendo così di fatto il raggruppamento di detta disciplina per anni svolto dal Prof. Carlo Ciliberto, messo in fuori ruolo a partire dall'1.11.95 per aver raggiunto il 72° anno di età; posto che peraltro era stato ricoperto dal suo Maestro: Carlo Miranda. Pertanto i posti di prima fascia ricoperti risultarono 25 e quelli disponibili 7.

Nell'anno 1996/97 si ebbero i seguenti movimenti: il Prof. Giuseppe Mulone con decorrenza 1.11.96 fu trasferito all'Università di Catania e il Prof. Antonio Zitarosa si mise in quiescenza a partire dall'1.12.96; inoltre la Prof.ssa Gianna Stefani fu trasferita ad altra sede a decorrere dal 1° 11.97.

Circa l'utilizzazione degli 8 posti vacanti di I fascia, 2 rispettivamente già ricoperti dal Prof. Busetto (ex Algebra) e dal Prof. Ciro Ciliberto (ex Geometria Algebrica), furono destinati dalla Facoltà rispettivamente il 27.1.1992 e il 14.1.1986, mentre gli altri 6 (ex: Carlo Ciliberto, Nicola Fusco, Nicola Melone, Giuseppe Mulone, Antonio Zitarosa, Gianna Stefani) rimasero ancora da destinare. Va peraltro aggiunto che anche Carlo Ciliberto si pose prematuramente in quiescenza a partire dal 1° gennaio 1997 e dal 1° 11.1997, sul posto da lui già coperto, fu nominato il Prof. Vittorio Coti Zelati per trasferimento dalla Facoltà di Architettura della Università di Napoli "Federico II" dove aveva insegnato Analisi Matematica e Geometria Analitica e inoltre sul posto già coperto da Zitarosa fu nominato dal 1° 11.1997 il Prof. Riccardo De Arcangelis per trasferi-

mento dall'Università degli Studi di Salerno. Pertanto allo stato presente i posti coperti di professori di I fascia risultano 24 mentre i disponibili sono 8 (Vedere Prospetto n. 2 dell'Appendice C).

Passando alla fascia dei professori associati va tenuto presente che in base all'art. 20 del D.P.R. 382/80 essa fu fissata a livello nazionale in 15.000 posti e nella prima applicazione l'organico iniziale fu corrispondente al numero degli idonei aventi titolo, numero che, peraltro, fu incrementato di altri 6.000 posti. Inoltre, va precisato che i posti di professore associato resisi liberi e vacanti potevano e possono essere coperti per concorso o per trasferimento su richiesta della Facoltà.

Va ricordato che, in base all'art. 50 del già citato D.P.R. 382/80, nella prima applicazione potevano essere inquadrati, a domanda, previo giudizio di idoneità nel ruolo in discorso, i soggetti di cui ai punti 1),2),3) di detto art. 50. Conseguentemente per il corso di laurea in Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dell'Università di Napoli i primi idonei, in numero di 28, furono nominati durante l'a.a. 1982/83, con decorrenza dall'1.8.1980, dopo di che non vi furono altre nomine di idonei a professore associati.

Negli anni accademici 1986/87 e 1991/92 si svolsero due concorsi liberi e così furono nominati alcuni vincitori.

Nell'anno accademico 1995/96 fu bandito il terzo concorso libero la cui espletazione fu purtroppo complessa, tal che soltanto durante l'anno accademico 1996/97 il MURST poté effettuare la nomina delle Commissioni di concorso la cui espletazione ormai si è conclusa, salvo qualche caso sporadico.

Pertanto allo stato attuale l'organico dei professori associati di discipline matematiche del Dipartimento di Matematica e Applicazioni del nostro Ateneo, risulta essere di 53 posti così articolati: 33 della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. e 20 della Facoltà di Ingegneria. (Vedere Prospetto n. 3 dell'Appendice C).

E' poi da ritenere che alla luce di quanto descritto precedentemente, in sostanza:

- nell'ambito di circa 14 anni (1980-1994) sono stati banditi ed espletati tre concorsi per professori di I fascia, così come stabilito dal D.P.R. 382/80;
- nell'ambito di 13 anni (1980-1993) si è provveduto preliminarmente ai giudizi di idoneità per i professori associati e poi, come stabilito dal D.P.R. 382/80, sono stati banditi ed espletati due concorsi per professori di II fascia (1987-1991) non rispondendo così a quanto stabilito dal citato art. 3 del predetto D.P.R.. Oltre tutto, poi, è da rilevare che il terzo concorso per professori di II fascia stabilito dal citato D.P.R. fu bandito verso la metà del 1996, quindi con notevole ritardo e peraltro con lenta attuazione, tanto vero che soltanto nella primavera del 1997 si svolsero le procedure per la costituzione delle Commissioni di esame, che poi furono nominate ed insediate, iniziando così il relativo espletamento dei lavori. Tali ritardi causarono lo slittamento dell'approvazione del nuovo progetto di legge riguardante il reclutamento dei

docenti universitari, che, ha delegato alle singole Università e relative Facoltà i bandi di concorso e la conseguente espletazione. Comunque con l'inizio dell'a.a. 1998/99 sono stati finalmente nominati, in linea di massima, i nuovi vincitori per le discipline matematiche.

E' opportuno, poi, far presente che a seguito di una decisione assunta dal Consiglio Universitario Nazionale i docenti di I e II fascia non sono più assegnati ad una determinata disciplina bensì ad uno specifico settore disciplinare che fa parte di un'Area di base. La Facoltà di Scienze MM.FF.NN. si articola in 5 aree disciplinari riguardanti: Biologia, Chimica, Fisica, Geologia, Matematica. L'Area Matematica a sua volta si articola nei seguenti settori disciplinari omogenei: Algebra, Analisi Matematica, Analisi Numerica, Fisica Matematica, Matematiche Complementari, Probabilità e Statistica Matematica. In tal modo ogni docente è abilitato a svolgere l'attività didattica di una qualunque disciplina appartenente al proprio settore di afferenza in base al parere del Consiglio di Facoltà. Ciò non toglie che è sempre possibile il trasferimento ad altro settore disciplinare sulla base del parere del Consiglio di Facoltà secondo norme di legge. In proposito si rinvia ai citati Prospetti n. 2 e n. 3 nell'Appendice C nei quali sono riportati gli attuali assetti dei professori rispettivamente di I fascia e di II fascia.

A questo punto è opportuno fare alcune considerazioni circa la possibilità di utilizzazione di detti posti disponibili, avvertendo che tale discorso riguarda complessivamente, in generale, le coperture finanziarie occorrenti per il reclutamento del personale docente, ricercatore e non docente. Su tale materia va fatto riferimento all'art. 5 della legge 24.12.1993, n. 537 "Interventi correttivi di finanza pubblica", concernenti l'Università, specificamente ai commi 9,10,11 e 12. A tale proposito vale la pena evidenziare che: "Gli organici nazionali del personale docente e non docente delle Università sono costituiti dalla somma delle dotazioni organiche dei singoli Atenei" e "Le modifiche degli organici sono deliberate dalle Università secondo i rispettivi ordinamenti. Non sono consentite modifiche comportanti oneri aggiuntivi rispetto alla spesa complessiva per gli organici definiti nel comma 10". Questo comma è abbastanza chiaro, tale da non creare equivoci, per cui non è il caso di soffermarvisi.

Il problema subito evidenziatosi è ovviamente quello delle disponibilità finanziarie erogate dal Ministero competente alle Università. Tali disponibilità allo stato sono molto limitate, ragion per cui i posti vacanti di cui in precedenza, non potranno essere ricoperti, nemmeno in maniera sia pure limitata.

Invero, in riferimento all'esercizio finanziario 1996, le disponibilità finanziarie per la Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dell'Ateneo "Federico II" per il solo personale in servizio per l'anno 1996 risultarono essere le seguenti:

Posti ricoperti al 31.12.93 vacanti all'11.95	unità	importo
docenti prima fascia	6	635.269.189
docenti seconda fascia	37	3.197.840.477
ricercatori	1	58.000.000
assistenti ordinari	1	91.502.167
incaricati esterni	1	28.277.994
Totale		4.010.690.827

dal cui totale vanno detratti poco più di L. 1.500.000.000 per l'incremento di supplenze e contratti per l'a.a. 1995/96 e vincoli per concorsi in itinere per professori associati.

Tenuto conto che lo schema su esposto riguarda le esigenze dell'intera Facoltà, l'attivazione di posti di ordinario e di associato per l'area Matematica si presenta in maniera limitatissima: al più un posto per docenti di I fascia e al più 7 o 8 ! per docenti di II fascia (16).

A quanto risulta, salvo diverso avviso, non si sono avute indicazioni circa gli esercizi finanziari 1997 e 1998.

Quanto, poi, alle altre categorie di docenti o paradocenti va rilevato che, rispetto alla situazione descritta da Miranda nella sua Nota, tenuto conto delle novità emerse a seguito di quanto espresso in precedenza, la situazione risulta ampiamente cambiata rispetto a quanto Egli aveva previsto e scritto nell'ultima parte dell'analogo capitolo. Per facilità e maggiore chiarezza di comprensione dello stato delle cose ritengo opportuno illustrare la situazione attraverso l'Appendice D articolata nei Prospetti dal n.4 al n.9.

Dai grafici emerge con chiarezza l'estinzione della figura di professore incaricato a partire dall'a.a. 1988/89, cosa del resto, come abbiamo rilevato, conseguente a quanto stabilito dal D.P.R. 382/80, nonché di quella di assistente ordinario. Per quanto riguarda gli assistenti ordinari, risulta che ormai nel nostro Dipartimento ne sono rimasti sei ad esaurimento.

Alla luce di questi dati va rilevato che in qualche modo la profezia di Miranda secondo la quale il numero degli incarichi di insegnamento sarebbe diminuito in corrispondenza dell'aumento di quello dei professori di ruolo dovuto alla proliferazione degli insegnamenti e dalla necessità, allora, dello sdoppiamento di corsi molto affollati. Cosa, questa, che per alcuni corsi di laurea invece è diminuita, come è avvenuto per la Matematica, la Fisica e anche altri corsi di laurea della Facoltà di Scienze.

Da quanto esposto, emerge chiaramente almeno un riscontro positivo circa l'assetto delle figure dedicate all'attività didattica e di ricerca, nel senso, ormai, che oltre quelle costituzionali di professore ordinario e di professore associato, esiste anche la figura del ricercatore per la quale rinvio al successivo punto 4.4.

Nel concludere questo paragrafo, va rilevato che le considerazioni fatte da Miranda nei commi terzo, quarto e quinto della pag. 33 della sua Nota si sono sostanzialmente avverate!

#### 4.4 - RICERCATORI

La già citata legge 28/80 e il conseguente D.P.R. 382/80 istituirono una nuova fascia al di là della docenza universitaria, e cioè il ruolo dei ricercatori universitari i cui compiti sono specificamente e costituzionalmente quelli di contribuire allo sviluppo della ricerca scientifica universitaria e di assolvere a compiti didattici integrativi dei corsi di insegnamento ufficiali, comprese le esercitazioni, la collaborazione con gli studenti nelle ricerche attinenti alle tesi di laurea e la partecipazione alla sperimentazione di nuove modalità di insegnamento ed alle connesse attività tutoriali. L'accesso al ruolo è per concorsi decentrati presso le singole sedi universitarie.

Nello stesso D.P.R.382/80 fu stabilito, in prima applicazione, che venivano inquadrati a domanda degli interessati, nel ruolo dei ricercatori universitari, in qualità di confermati, previo giudizio di idoneità, gli appartenenti ad un amplissimo elenco di soggetti riportato nell'art. 58 del precitato D.P.R.. In seguito il reclutamento è avvenuto e avviene tramite concorsi banditi dall'Università su posti attribuiti dal Ministero e destinati alle Facoltà dagli Organi di governo dell'Ateneo. L'andamento numerico dei ricercatori per a.a. e per disciplina è riportato nell'Appendice D. Va aggiunto, peraltro, che alcuni ricercatori sono poi diventati docenti di ruolo.

#### 4.5 - ATTIVITÀ DIDATTICA

L'attività didattica concerne i corsi di laurea in Matematica, Fisica, Chimica, Chimica Industriale, Scienze Biologiche, Scienze Naturali, Scienze Geologiche, e il biennio dei corsi di laurea in Ingegneria. Nell'Appendice E, Prospetti n. 10 e n. 11 sono riportati rispettivamente gli immatricolati dei suddetti Corsi di laurea e i laureati suddivisi per anni accademici. Da essi si deduce che c'è stato un forte calo delle immatricolazioni in tutti i Corsi di laurea della Facoltà di Scienze MM.FF.NN., in particolare per il corso di laurea in Matematica. Pur tuttavia ciò non ha portato una restrizione del personale docente, che di fatto è anzi aumentato, rispetto alla situazione esistente alla fine degli anni '70(17). I Corsi di lezioni svolti dai docenti dell'intero Dipartimento sono oltre 100. Va poi aggiunto che ormai già da parecchi anni non si svolgono più corsi per lavoratori studenti.

In base a quanto stabilito nell'ultimo comma dell'art.1 del D.P.R. 11.7.80, n. 382 cessarono gradualmente gli incarichi di insegnamento; attualmente nel

nostro Dipartimento è rimasto un solo professore incaricato che ovviamente terminerà l'attività al momento in cui andrà in quiescenza.

D'altronde nello stesso precitato D.P.R. è introdotta la figura del Professore a Contratto (articoli 25-29). Al Dipartimento di Matematica ed Applicazioni sono stati assegnati dall'a.a. 1981/82 al 1997/98 complessivamente 21 contratti (vedere il Prospetto allegato n.12 nell'Appendice F).

Va poi ricordato che l'art. 114 del D.P.R. 382/80 stabilisce che "Gli affidamenti e le supplenze possono essere conferite esclusivamente a professori di ruolo o a ricercatori confermati ecc.....". A tale proposito va ricordato che le supplenze vengono retribuite nei limiti delle disponibilità dagli organi di Governo dell'Ateneo (Senato Accademico e Consiglio di Amministrazione) alle varie Facoltà e all'interno di esse nell'ambito delle rispettive aree.

Nel Prospetto allegato n. 13 nell'Appendice G sono riportate le assegnazioni di supplenze (retribuite o a titolo gratuito) dall'anno accademico 1981/82 a quello del 1997/98.

In base all'art. 94 del D.P.R. 11.7.80, n. 382 sono stati istituiti i Consigli di corso di laurea e di indirizzo con relative prerogative, presieduti da un professore ordinario.

Il Consiglio di corso di laurea in Matematica ha avuto alternativamente come Presidente i professori: A. Zitarosa (1980/81), M.R. Occorsio (1981/84), L.M. Ricciardi (1984/87), G. Trombetti (1987/90), C. Sbordone (1990/92), N. Melone (1992/94), A. Alvino (1994-1997), F. Visentin (1997/....).

Non è il caso di soffermarsi molto sulle specifiche attività svolte da detto Consiglio, ma ciò che va posto in evidenza è che esso certamente ha contribuito e contribuisce alla riduzione di attività che in precedenza erano di pertinenza del Consiglio di Facoltà, snellendone così le capacità operative. Fra l'altro fu definito, con il consenso del Preside di Facoltà, il coordinamento dei corsi e la stesura dei programmi in un opuscolo e fu creata una Commissione per la didattica, ampliata anche a docenti matematici di altri Consigli di Corsi di laurea. Non sono mancate altre nuove e significative iniziative, che hanno contribuito a superare problemi di rilievo. Va aggiunto che nella sede di Monte S. Angelo esiste un laboratorio frequentato dagli studenti, che, peraltro, andrà potenziato. Inoltre è stato attivato un secondo laboratorio destinato agli allievi di Ingegneria, nella sede di Via Claudio.

Sui problemi dell'attività didattica Miranda si soffermò particolarmente nella sua Nota (pagine34-35), ponendo le problematiche esistenti e quelle del futuro. Alcune di queste sono di fatto superate alla luce di quanto fin qui esposto. In ogni modo vanno fatte le seguenti considerazioni:

#### a) Ordinamento didattico

La tabella del Corso di Laurea in Matematica attualmente in vigore risale ai primi anni sessanta; con l'introduzione dei piani di studio individuali essa pe-

rò è stata praticamente messa da parte. Infatti solo uno sparuto numero di studenti sceglie il piano statutario; la maggioranza preferisce affidarsi ai cosiddetti piani consigliati che anno per anno vengono formulati dal Consiglio di Corso di Laurea. Tale situazione si è di modificata a seguito dell'entrata in vigore della nuova tabella, già in attuazione. Tale novità ha messo ordine, fissando in modo preciso il quadro in cui ogni studente deve muoversi per determinare il proprio percorso culturale. Da notare che tale tabella presenta un numero limitato di "vincoli", e ciò dovrebbe consentire agli studenti e, soprattutto al CCL in Matematica, di individuare percorsi formativi agili e non rigidi, facendo magari ricorso in modo più o meno massiccio all'attivazione dei moduli.

#### b) Modalità di insegnamento

La situazione è completamente differente da quella cui si riferisce Miranda. Infatti alla figura del "cattedratico" cui facevano riferimento vari assistenti e borsisti (precari) si è venuta sostituendo, col più volte citato D.P.R. 382/80, quella del professore di ruolo di I o II fascia, affiancato da un numero limitato di Ricercatori cui affidare le cosiddette esercitazioni. Se, da una parte, questa situazione rende ormai impraticabile quanto auspicato da Miranda, dall'altra, la possibilità prevista dalla legge di sperimentare nuove forme di didattica e il numero limitato di studenti, almeno rispetto ai tempi di Miranda, potrebbe far presagire una didattica più efficace.

#### c) Esame di Laurea

Su questo punto la normativa non è cambiata. Resta ovviamente aperto il problema di rivedere, sempre nel rispetto della lettera della legge, le finalità dell'esame di laurea in modo che esso diventi un momento importante nel percorso formativo dello studente.

### 4.6 - ATTIVITÀ DI RICERCA

Riallacciandosi alla Nota di Miranda, negli anni che vanno dal 1977 a tutt'oggi, si può ben dire che l'attività di ricerca è continuata secondo gli standards precedenti e le linee descritte in detta Nota, ovviamente mediante l'apertura ad altre nuove, e a sempre maggiori contatti fra le scuole nazionali e internazionali, attraverso continui rapporti e scambi di attività, anche extra moenia. A tale proposito va messo in rilievo che nuove iniziative legislative, effettuate agli inizi degli anni '80 (dottorato di ricerca, borse di studio all'estero, ecc.), certamente hanno costituito un ottimo viatico per lo sviluppo della ricerca. In particolare:

a) Va evidenziato che, in riferimento all'ultimo ventennio, cioè a partire dalla data della Nota di Miranda, l'attività di ricerca scientifica nel Dipartimento ha continuato ad essere intensissima, anzi si è notevolmente aggiornata e am-

pliata. Essa si è prevalentemente rivolta e si rivolge per: l'*Algebra* (M. Curzio, F. De Giovanni, C. Metelli), Teoria dei Gruppi; l'*Analisi Matematica* (P. De Lucia, A. Canfora, R. Fiorenza, L. Benevento, T. Bruno, N. Fedele, I. Del Prete, G. Moscardiello, A. Alvino, G. Trombetti, C. Sbordone, L. Carbone, P. Buonocore, E. Giarrusso, G. Stefani, V. Coti Zelati, N. Fusco) aree scientifiche che si ricollegano alle linee di ricerca di Caccioppoli, Miranda, Cafiero, ecc. quali: Teoria della misura e dell'integrazione, Multifunzioni, Calcolo delle Variazioni, Teoria delle equazioni funzionali, Derivate di ordine frazionario, Operatori pseudo differenziali, Analisi armonica, Disequazioni variazionali, Rappresentazioni conformi, Teoria dei numeri, Convergenza e studio del comportamento asintotico delle soluzioni di famiglie di equazioni differenziali (G - convergenza, H - convergenza) e più recentemente: Geometria delle soluzioni di equazioni a derivate parziali, stime isoperimetriche; la *Geometria* (Ciro Ciliberto, F. Orecchia, D. Olanda), Geometria algebrica e differenziale, Serie lineari di curve; la *Fisica Matematica* (S. Rionero, A. Romano, R. Grassini, F. Visentin), Relatività, Meccanica classica, Termomeccanica e cambiamento di fase, Stabilità per sistemi di dinamicità discreti e continui, Fluidodinamica per fluidi neutri ed elettroconduttori, Problemi di biomatematica e diffusione, Geometrizzazione della fisica e meccanica analitica; il *Calcolo e l'Analisi Numerica* (M.R. Occorsio, A. Murli, E. Russo) studio di vari metodi di approssimazione, studio di problemi teorici e computazionali relativi a vari settori delle scienze e dell'ingegneria; la *Probabilità computazionale e Applicazioni* (L.M. Ricciardi), la *Logica Matematica*, la *Didattica della Matematica*, la *Storia della Matematica*. E' opportuno soffermare l'attenzione sugli ultimi cinque settori di ricerca in quanto di sviluppo relativamente recente rispetto agli altri di lunga e antica tradizione. Invero fu agli inizi degli anni '60 che cominciò a prendere cittadinanza nell'ambiente matematico lo studio sistematico del Calcolo numerico e relativa programmazione, nonché dei metodi matematici per le applicazioni, mentre nell'ambito dell'ingegneria si sviluppavano gli studi relativi all'informatica sistemistica. Fu Renato Vinciguerra che, su suggerimento di Miranda (relatore alla tesi di laurea), si dedicò a tali problematiche, svolgendo attività di ricerca nel settore del Calcolo numerico, e così nell'ultimo quarantennio si è venuto a creare un nutrito gruppo di docenti e ricercatori in detto settore, che svolgono un'intensa, proficua attività scientifica ampliata, nel frattempo, a settori concernenti l'informatica matematica, la matematica computazionale, ecc. In sostanza Vinciguerra si può ritenere il capostipite del settore Analisi numerica ed informatica matematica della nostra Facoltà di Scienze MM.FF.NN.. Quanto poi al settore di Probabilità computazionale e applicazioni, esso - sorto con l'insegnamento di Statistica Matematica, attivato per supplenza alla fine degli anni '70 - si è sviluppato nell'ultimo ventennio per iniziativa di Luigi Maria Ricciardi, ordinario di Calcolo delle Probabilità, riapprodato a Napoli. Invero egli in questi anni ha creato un sostanzioso gruppo di ricerca e di didattica nel campo della Probabili-

tà computazionale e applicazioni in diversi settori delle scienze e dell'ingegneria; notevoli sono i rapporti di collaborazione scientifica con varie istituzioni nazionali ed estere; è sorto così un nutrito gruppo di allievi, alcuni dei quali sono oggi docenti o ricercatori.

Quanto al settore della Logica Matematica va ricordato che fin dall'anno 1971/72 si svolse per incarico il corso di tale materia. Precedentemente, a partire dall'inizio degli anni '60, si erano svolti nella Facoltà di Scienze MM.FF.NN. studi di detta materia nell'ambito del Corso di Specializzazione in Fisica Teorica, mentre nel corso di Laurea in Matematica si tennero un ciclo di seminari promossi nel 1965 da Federico Cafiero e un corso affidato a Cesare Tonti nel periodo 1965/69.

Argomenti di varia natura, relativi sempre alla Logica Matematica, sono stati svolti nel corso di Matematiche Elementari dal punto di vista superiore, materia complementare dell'indirizzo didattico del corso di laurea in Matematica, svolto per circa un quinquennio da Roberto Tortora.

Inoltre una notevole attività di ricerca in detta materia si svolge ad opera di alcuni membri da molti anni (Tortora, appartenente al Dipartimento, Giangiaco Gerla e Antonio Di Nola dell'Università di Salerno), utilizzando all'uopo, ininterrottamente dal 1981, fondi di varia provenienza ministeriale.

Quanto poi alla Storia della Matematica va rilevato che nell'ultimo ventennio su iniziativa, particolarmente da parte dei Proff. Paolo de Lucia e Luciano Carbone, si è creata una vera e propria Scuola, molto impegnata nella ricerca e nello studio di significativi problemi della Storia della matematica, particolarmente a Napoli; in proposito rinvio al punto I e alla nota(2). Va aggiunto, peraltro, che nell'ambito del Corso di Storia della Fisica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. negli ultimi venti anni è stato dedicato un intero semestre a tale disciplina in quanto essa, tuttora, non è ancora attivata per il Corso di laurea in Matematica.

E' opportuno peraltro rilevare che nell'ambito dell'indirizzo didattico del Corso di laurea in Matematica si svolgono i corsi di Matematiche Complementari I e Matematiche Complementari II e, dal 1997, di Matematiche Elementari dal punto di vista Superiore. In proposito va detto che in questi ultimi due anni si sono svolti e si svolgono argomenti fondamentali di notevole rilievo formativo.

Inoltre è da aggiungere che nell'arco di tempo di oltre venti anni sono state svolte molte iniziative riguardanti la Didattica Matematica nella Facoltà di Scienze MM.FF.NN., concernenti: - l'attivazione di una unità locale di un gruppo di ricerca con fondi MURST 40%, - incontri nazionali e convegni, - disponibilità dell'ex Istituto di Matematica e poi del Dipartimento di Matematica e Applicazioni a ricevere la Sezione Napoletana della Mathesis a partire fin dal 1959, della quale sono stati presidenti Carlo Ciliberto, Alfredo Franchetta, Vittorio Dalla Volta, Laura Castellano, Aldo Morelli, - varie altre iniziative cultu-

rali, quali: convegni, corsi di aggiornamento per insegnanti, - partecipazione a manifestazioni culturali cittadine e nazionali nel settore, - corsi annuali di perfezionamento post-laurea in Didattica della Matematica, - convenzione tra il Dipartimento e il Ministero della Pubblica Istruzione per la creazione di un progetto di software didattico per l'insegnamento della Geometria nella Scuola superiore (Elvira Russo); tale iniziativa ha avuto un'ampia diffusione nelle scuole italiane; - recentemente è stato istituito un Corso annuale in Didattica della Matematica con una notevole frequentazione, - dal 1996/97 istituzione di Corsi di aggiornamento d'intesa con il Provvederato agli Studi di Napoli per insegnanti delle Scuole medie e superiori, con la partecipazione dei docenti: Fergola, Morelli, E. Russo, Tortora, - inoltre feconda è l'attività del detto settore didattico riguardante manifestazioni culturali, cittadine e nazionali (Galassia Gutenberg, Settimane per la diffusione della cultura scientifica, ecc.), - convegni su Matematica e Ambiente rivolti ad insegnanti, promossi da Paolo Fergola e Carlo Sbordone.

Concludo questa parte concernente l'attività di ricerca svolta nel Dipartimento, avvertendo che per ovvi motivi di brevità ho dovuto limitarmi a sintetiche informazioni.

b) Hanno ottenuto la nomina a professore ordinario i seguenti collaboratori dell'Istituto (dal 1977 fino al 1982/83) e, poi, del Dipartimento oppure appartenenti ad altre strutture dell'Università "Federico II" quali ad esempio Facoltà di Ingegneria, Facoltà di Economia e Commercio, Facoltà di Architettura (a partire dal 1983/84 a tutt'oggi), per la sede o le sedi nell'ordine a fianco indicate (19):

Algebra: Francesco De Giovanni (Napoli), Mercede Mai (Salerno).

Analisi Matematica: Angelo Alvino (Napoli), Carlo Sbordone (Napoli), Guido Trombetti (Napoli), Luciano Carbone (Salerno, Napoli), Raffaele Toscano (Napoli Architettura, Napoli Ingegneria), Ester Giarrusso (Messina, Salerno, Napoli), Patrizia Donato (Salerno, Rohan (Francia)), Pasquale Buonocore (Salerno, Napoli), Immacolata Del Prete (Potenza, Napoli Ingegneria), Rosanna Schianchi (Palermo, L'Aquila, Roma "La Sapienza"), Nicola Fusco (Napoli, Firenze), Riccardo De Arcangelis (Salerno, Napoli), Gioconda Moscarriello (Salerno, Napoli Ingegneria), Espedito De Pascale (Cosenza).

Analisi Numerica: Elvira Russo (Salerno, Napoli).

Calcolo Numerico e Programmazione: Mario Rosario Occorsio (Napoli), Almerico Murli (Napoli), Giuseppe Maria Mastroianni (Potenza), Giulio Giunta (Istituto Universitario Navale), Maria Rosaria Crisci (Salerno).

Geometria: Ciro Ciliberto (Lecce, Napoli, Roma "Tor Vergata"), Ferruccio Orecchia (Napoli), Francesco Mazzocca (Napoli, Caserta), Domenico Olanda (Napoli).

Istituzioni di Geometria Superiore: Guglielmo Lunardon (Napoli, dall'a.a. 93/94).

Istituzioni di Matematiche: Nicola Melone (Napoli, Caserta), Ester Giarrusso (Salerno, Napoli).

Matematica Generale: Vincenzo Aversa (Napoli Economia e Commercio), Aldo Ventre (Aversa), Achille Basile (Napoli Economia e Commercio).

Matematiche Complementari: Guglielmo Lunardon (Napoli, fino all'a.a. 92/93), Giangiacomo Gerla (Salerno).

Meccanica Razionale: Giovanni Paolo Galdi (Napoli, Ferrara), Pasquale Renno (Napoli Ingegneria), Renato Grassini (Napoli), Armando D'Anna (Napoli Ingegneria), Remigio Russo (Napoli, Caserta), Giuseppe Mulone (Napoli, Catania).

Teoria ed Applicazioni delle Macchine calcolatrici: Giancarlo Gerla (Camerino) (dal 1.1.90 all'1.11.93).

Vale la pena, poi, fare presente che rispetto a quanto esposto da Miranda nella sua Nota alla pagina 28, si sono avuti i decessi di Carlo Miranda, Guido Stampacchia, Federico Caffero, Donato Greco, Pasquale Mastrogiacomo, e si sono avuti i seguenti trasferimenti: Antonio Avantageggiati a Roma "La Sapienza" Ingegneria, Silvano Matarasso a Modena, Luigi Salvadori a Trento, e l'anticipata messa in quiescenza di: Laura Castellano, Francesco Stoppelli, Antonio Zitarosa, Carlo Ciliberto.

Hanno ottenuto la nomina a professore associato i seguenti collaboratori appartenenti o appartenuti in varie attività di studio, di ricerca e di lavoro didattico all'ex Istituto di Matematica o al Dipartimento di Matematica e Applicazioni o alle Facoltà di Architettura e di Economia e Commercio dell'Università "Federico II", per la sede o le sedi nell'ordine a fianco indicato:

Algebra: Salvatore Rao (Napoli), Gabriele Giordano (Napoli), Patrizia Longobardi (Napoli), Mercede Maj (Napoli), Silvana Franciosi (Salerno).

Analisi Funzionale: Immacolata Del Prete (Napoli, fino al 15.6.87), Riccardo De Arcangelis (Napoli, fino al 31.10.1995).

Analisi Matematica I: Emma Guariglia (Napoli), Anna Esposito (Napoli Ingegneria), Luisa Macchetta (Napoli Ingegneria), Giulia Montagnaro (Napoli Ingegneria), Margherita Di Iorio Danese (Napoli Ingegneria), Maria Beatrice Lignola (Napoli Ingegneria), Fausto Acanfora (Napoli 2).

Analisi Matematica II: Luigi Nappi (Napoli), Loredana Biacino (Napoli), Nicola Miserendino (Napoli Ingegneria),

Analisi Matematica: Luciana Sgambati (Salerno), Elvira Mascolo (Salerno), E-spedito De Pascale (Cosenza), Diana Nunziante (Istituto Universitario Navale)(20), Mirella Biancardi (Napoli Ingegneria), Gioconda Moscariello (Napoli Ingegneria), Rosalba Carrese (Napoli), Vincenzo Ferone (Napoli Ingegneria), Michelangelo Franciosi (Salerno), Maria Transirico (Salerno), Maria Beatrice Lignola (Salerno), Antonio Carlo Esposito (Cassino), Michele Balzano (Cassino), Greco Luigi (Napoli Ingegneria), Alberto Fiorenza (Napoli Architettura), Maria Rosaria Posteraro (Napoli), Anna Mercaldo (Napoli Ingegneria), Maria Francesca Betta (Napoli 2).

Analisi Matematica e Geometria Analitica: Maria Luigia Di Viccaro (Napoli Architettura), Francesco Tucci (Napoli Architettura), Anna Maria D'Aristotile (Napoli Architettura), Livia D'Apuzzo (Napoli Architettura), Antonio Di Nola (Napoli Architettura, fino al 31.10.96).

Analisi Numerica: Almerico Murli (Napoli, fino al 22.10.86), Giuliano Laccetti (Potenza, Napoli), Maria Antonietta Pirozzi (Istituto Universitario Navale).

Analisi Superiore: Jaqueline Morgan Sciarrino (Napoli, fino al 31.10.95, poi trasferita a Napoli Economia e Commercio sul raggruppamento Matematica per l'Economia).

Calcolo Numerico: Elvira Russo (Napoli, fino al 31.10.86), Giuliana Criscuolo (Napoli), Alessandra D'Alessio (Salerno).

Calcolo Numerico e Programmazione: Maria Rosaria Crisci (Napoli, fino al 31.10.95), Giulio Giunta (Potenza).

Esercitazioni di Matematiche: Giuseppe Maria Mastroianni (Napoli, fino al 31.10.87), Stefano Steri (Napoli).

Fisica Matematica: Ettore La Serra (Salerno), Michele Ciarletta (Salerno Ingegneria), Giovanni Matarazzo (Salerno Ingegneria), Gabriele Guerriero (Salerno Ingegneria sede Benevento).

Geometria: Tito Pantaleo (Napoli Ingegneria), Gennaro De Paris (Napoli Ingegneria), Gabriele Guerriero (Salerno Ingegneria sede Benevento), Anna Di Concilio (Salerno), Antonio Di Nola (Salerno), Rosa Esposito (Napoli), Pia Maria Lo Re (Napoli), Paola De Vito (Napoli Ingegneria), Giuseppina Pica (Napoli Ingegneria), Luciano Lomonaco (Salerno).

Geometria I: Salvatore Antonucci (Napoli Ingegneria), Alessandro Di Sante (Napoli, Ancona), Lora Di Fiore (Napoli), Gennaro De Paris (Napoli Ingegneria), Sara Dragotti (Napoli), Giustina Pica (Napoli Ingegneria).

Geometria II: Francesco Mazzocca (Napoli, fino all'1.4.87), Giuseppe Di Maio (Napoli, Caserta), Assunta Russo (Napoli).

Geometria Descrittiva: Aldo Ventre (Napoli Architettura)

Geometria Superiore: Domenico Olanda (Napoli, fino al 6.3.87).

Informatica: Antonio Gisolfi (Salerno), Clelia De Felice (Salerno), Maria Immacolata Sessa (Salerno).

Istituzioni di Analisi Superiore: Pasquale Buonocore (Napoli, fino a 13.5.87), Pasquale Zecca (Napoli), Lucia Migliaccio (Napoli).

Istituzioni di Fisica Matematica: Paolo Fergola (Napoli), Catello Tenneriello (Napoli), Francesca Visentin (Napoli, fino al 31.10.94), Bruno Carbonara (Università Basilicata).

Istituzioni di Geometria Superiore: Nicola Melone (Napoli, fino al 31.10.87).

Istituzioni di Matematiche: Antonietta Cioffi (Napoli, fino al 31.10.86, trasferitasi all'Università Statale di Milano 1.11.86), Teresa Del Vecchio (Napoli deceduta il 13.8.96 a seguito di un incidente automobilistico!), Anna Bruna D'Andrea (Napoli), Lucio Parlato (Napoli), Maria Rosaria Tricarico (Napoli), Giu-

seppe Maria Mastroianni (Napoli, fino al 3.11.86), Paola Bondi (Napoli, Caserta), Gennaro Colaps (Napoli), Pasquale de Angelis (Napoli, Istituto Universitario Navale dall'1.11.91), Roberto Tortora (Napoli), Gennaro Volzone (Napoli), Stefano Steri (Napoli), Luciana Nania (Napoli), Vincenzo Esposito (Napoli).

Matematica Applicata: Mariarosaria Rizzardi (Istituto Universitario Navale).

Matematica Finanziaria: Vittorio Emanuele Provenza (Salerno Economia e Commercio).

Matematica Generale: Pasquale Del Prete (Napoli Economia e Commercio), Pasquale De Angelis (Istituto Universitario Navale), Achille Basile (Napoli Economia e Commercio).

Matematiche complementari: Guglielmo Lunardon (Napoli fino al 31.10.93), Aldo Morelli (Napoli), Roberto Tortora (Napoli), Franco Palladino (Salerno), Antonio Di Nola (Salerno, a partire dal 1996/97).

Matematiche elementari dal punto di vista superiore: Giancarlo Gerla (Basilicata, dal 17.10.1987 al 31.10.1990).

Meccanica Analitica: Remigio Russo (Napoli, Napoli 2).

Meccanica dei Continui: Fabio Rosso (Napoli, Firenze).

Meccanica Razionale: Catello Tenneriello (Napoli), Paolo Fergola (Napoli), Renato Grassini (Napoli), Bruno Carbonaro (Potenza, Napoli 2), Francesco Contursi (Napoli Ingegneria, Accademia Aeronautica), Berardino D'Acunto (Napoli Ingegneria), Armando D'Anna (Napoli Ingegneria), Alfonso Maio (Napoli Ingegneria), Giovanni Matarazzo (Napoli Ingegneria, Salerno), Maria Rosaria Padula (Napoli, Ferrara), Carmine Attaianese (Napoli Ingegneria), Paolo Massarotti (Napoli Ingegneria), Enrico Mazziotti (Napoli Ingegneria), Donatella Iannece (Napoli), Anna Maria Monte (Napoli Ingegneria), Gabriele Guerriero (Cagliari), Fabio Rosso (Firenze), Luigi Preziosi (Torino).

Meccanica Superiore: Lucia Gambardella (Napoli, Roma "La Sapienza").

Teoria dei Gruppi: Clorinda De Vivo (Napoli).

Teoria delle Funzioni: Rosanna Schianchi (Napoli, fino al 21.5.87).

Teoria ed Applicazioni delle Macchine Calcolatrici: Giancarlo Gerla (Camerino).

Topologia: Giuseppe Di Maio (Napoli, Caserta).

Va aggiunto che notevole è stata, e tuttora è, la schiera di Ricercatori laureatisi nell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. o nel Dipartimento di Matematica ed Applicazioni.

c) Al di là dell'esposizione precedente va aggiunto che, come già rilevato da Miranda nella sua Nota, sono continuati ed ampliati contatti di varie valenze. E così si sono viepiù avuti periodi di permanenza a Napoli di parecchi studiosi - soffermatisi allo scopo di avere contatti e rapporti di studio e di ricerca - che poi raggiunsero la cattedra di ordinario o di associato. Inoltre è da ricordare che si sono laureati in Matematica a Napoli, in qualche caso anche prima del 1977, i matematici: - Vinicio Moauro trasferitosi nella qualità di assistente ordinario

dall'Università di Napoli a quella di Trento dove poi, a seguito di concorso, è stato nominato ordinario di Meccanica Razionale e tuttora lo è; - Francesco Zirilli laureatosi in Matematica all'Università di Bari, trasferitosi a quella di Napoli nella Facoltà di Scienze in qualità di assistente ordinario, nonché di professore incaricato e poi ordinario di Geometria nell'Accademia Aeronautica di Pozzuoli; - Antonio Corbo Esposito e Michele Balzano, professori associati di Analisi matematica all'Università di Cassino.

All'Università di Salerno poi afferiscono quattro ricercatori di discipline matematiche laureatisi nell'Università di Napoli "Federico II". Peraltro sempre nell'Università di Salerno hanno svolto, o tuttora svolgono, attività didattica docenti laureatisi alla succitata Università di Napoli, che però sono in posizione non di ruolo (incaricati, supplenti, contrattisti), complessivamente per un totale di 38 unità.

Alla Seconda Università di Napoli afferiscono sei ricercatori di discipline matematiche, laureatisi nella Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dell'Università "Federico II".

Inoltre si sono laureati in Matematica a Napoli Renato Guidobaldi, Elvira Natale, Rosanna Di Iorio, diventati, poi, docenti nell'Accademia Aeronautica di Pozzuoli: rispettivamente ordinario di Analisi Matematica il primo e associate: la prima di Geometria e la seconda di Analisi Matematica.

d) A questo punto va messo in evidenza il notevole patrimonio culturale e scientifico formatosi nella Scuola, consolidatosi e arricchitosi con ulteriori nuove leve, certamente frutto della eccellente maturazione di allievi avvenuta in ambiente che non solo è ampiamente cresciuto, ma si è fortemente consolidato mediante i proficui contatti con i precedenti e i nuovi Maestri, attraverso un'attività produttiva di rilievo, che ha portato ad un considerevole ampliamento dell'organico dei docenti e dei ricercatori, anche in conseguenza del nuovo assetto dettato dal D.P.R. 382/80.

e) Quanto alla Rivista "Ricerche di Matematica", a seguito del decesso di Miranda, che aveva tenuto la Direzione con la collaborazione di Trombetti, essa fu affidata dal Comitato di Redazione a Franchetta, per un certo periodo sempre con l'ausilio di Trombetti e, in prosecuzione, poi di Alvino, sostanzialmente in qualità di Segretario.

Va anche ricordato che nella prima metà degli anni '80 non mancò una dialettica da parte del Comitato di Redazione rivolta ad una ristrutturazione ed evoluzione in coerenza alla nuova realtà rispetto ai tempi della antica nascita della Rivista. Ma non si andò più avanti di una elaborazione di idee. Successivamente, a seguito della richiesta di Franchetta, già da tempo espressa, di lasciare la Direzione a partire dal gennaio 1994, il Comitato designò quale Direttore Carlo Ciliberto, coadiuvato da F. De Giovanni e C. Sbordone quali Segretari. Intanto emergeva chiaramente l'opportunità di una revisione della struttura che

ormai si era notevolmente ampliata rispetto agli inizi della costituzione della Rivista. E così, durante l'anno 1995/96, per iniziativa del Direttore fu aperta un'ampia e articolata discussione nell'ambito del Comitato di Redazione a conclusione della quale fu approvato un nuovo Regolamento della Rivista. Esso è entrato in vigore a partire dal 1° gennaio 1997. Sono stati confermati Carlo Ciliberto quale Direttore e F. De Giovanni e C. Sbordone quali Segretari. Intanto la Rivista è ora arrivata al quarantaquattresimo volume conservando tuttora una posizione di prestigio, anche in campo internazionale. Essa ha finora pubblicato: 770 Note e 54 Memorie, di cui 134 presentate da matematici napoletani (28% del totale), 364 da altri matematici italiani (44% del totale), 117 matematici stranieri (25% del totale); con un totale di 80 volumi pubblicati (tra fascicoli separati e riuniti), nonché tre supplementi relativi agli anni 1987, 1989 e 1992 dedicati rispettivamente a Miranda, Caccioppoli, Tolotti. Ulteriori dati riguardanti la Rivista sono riportati nell'Appendice H.

Il Dipartimento, proseguendo un'iniziativa già dai tempi dell'Istituto, dispone di una significativa serie di "Preprints", stampati in offset. (Vedere Appendice I Prospetto n. 14).

Molti altri lavori di matematici napoletani sono stati pubblicati nei Rendiconti dei Lincei, negli Annali di Matematica pura ed applicata, nel Bollettino dell'U.M.I., in quelli dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli e in altre qualificatissime Riviste italiane, nonché in prestigiose Riviste internazionali.

Non è poi mancata una forte collaborazione del C.N.R. attraverso varie attività che vanno dalla stampa della Rivista a quelle dell'organizzazione di iniziative di carattere culturale. E' continuata la collaborazione del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R. attraverso i Gruppi, i Contratti di ricerca, i Visiting Professors stranieri, le borse di studio per l'interno e per l'estero, almeno fino all'anno 1998. Risulta, invero, che si prevedono nuove impostazioni e modalità organizzative nel prossimo futuro.

f) Novità poi di rilievo riguardante la ricerca scientifica è stata l'introduzione del Dottorato di Ricerca. In proposito va ricordato che il primo capoverso dell'art. 68 del D.P.R. 382/80 recita: "E' istituito il Dottorato di Ricerca quale titolo accademico valutabile unicamente nell'ambito della ricerca scientifica". In attuazione a tale norma, nel corso dell'anno 1981 si tennero presso l'Istituto di Matematica numerose riunioni alle quali parteciparono massicciamente docenti delle Università del Sud, oltre che numerosi docenti di Roma "La Sapienza", all'epoca interessati ad entrare in Consorzio con la sede di Napoli. Vennero così approntate le proposte istitutive dalle quali nacquero due corsi di Dottorato di Ricerca con sede amministrativa nell'Università di Napoli: - il primo, consorziato tra le Facoltà di Scienze delle Università di Napoli e di Salerno, coordinato da Carlo Ciliberto dall'1.11.1984 (primo ciclo) ininterrottamente fino al 6.2.1990, data in cui gli subentrò Salvatore Rionero; Ciliberto fu coadiuvato

dapprima da De Lucia e, poi, da Fedele, - il secondo, consorziato tra le Facoltà di Scienze e di Ingegneria dell'Università di Napoli e le Facoltà di Scienze delle Università di Bari, della Calabria, di Catania, Lecce, Messina, Palermo e Salerno, coordinato da Luigi Maria Ricciardi, fin dall'inizio.

A seguito di nuova normativa, attualmente: - il Dottorato di Ricerca in Matematica è in consorzio con le Università della Basilicata, di Napoli II e di Salerno ed ha sede amministrativa nell'Università di Napoli "Federico II" presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", - il Dottorato di Ricerca in Matematica Applicata e Informatica con sede amministrativa nell'Università di Napoli "Federico II", in consorzio con le Università di Napoli II, Catania, Palermo e Salerno.

L'esperienza acquisita attraverso lo svolgimento dei cicli finora attivati ha confermato che il Dottorato di Ricerca ha costituito, insieme all'istituzione dei Dipartimenti, l'innovazione più incisiva introdotta finora nell'ordinamento universitario. Il richiesto, alto livello dei Collegi dei Docenti dei corsi di Dottorato di Ricerca e la verificata eccellenza della loro produzione scientifica hanno reso al contempo i Dottorati di Ricerca significativi indicatori dello stato stesso della ricerca scientifica nelle sedi ove sono istituiti. A tutt'oggi sono stati attivati 13 cicli per entrambi i dottorati di ricerca. A partire dall'XI Ciclo, l'INDAM collabora con i suddetti corsi di Dottorato finanziando attualmente un totale di 6 corsi annuali della durata di 30 ore ciascuno tenuti da docenti italiani, alcuni dei quali afferenti al Dipartimento stesso, proposti dai due coordinatori, nonché la presenza di 3 professori visitatori stranieri, annualmente per un totale di 6 mesi di permanenza.

I corsi di Dottorato comportano lo svolgimento di cicli di lezioni deliberati annualmente dai due collegi dei docenti (che sono gli organi di governo dei Dottorati), nonché di numerosi cicli seminari. Nell'Appendice L, Prospetto n. 15, viene indicato il numero di borse assegnate dal Ministero competente a ciascuno dei due dottorati. Si rinviano all'Appendice M, Prospetto n. 16, i dati numerici delle borse finanziate dall'INDAM per corsi svolti in collaborazione con i due dottorati e diretti prevalentemente a giovani neolaureati, con l'accluso elenco dei corsi, e i nominativi dei docenti che li hanno tenuti.

g) Notevole poi è stata l'attività dei Convegni e Workshops scientifici organizzati nell'ambito dell'Istituto e poi del Dipartimento per: Algebra, Analisi Matematica, Calcolo numerico, Didattica della Matematica, Fisica Matematica, Logica Matematica, Statistica Matematica, Storia della Matematica.

#### 4.7 - DIREZIONE DELL'ISTITUTO E DEL DIPARTIMENTO

Per quanto riguarda il residuo periodo dell'Istituto c'è da dire che sostanzialmente non si rilevano particolari fatti innovativi rispetto a quanto già espo-

sto nella Nota di Miranda, anche perché ormai, come del resto Egli stesso rileva, nell'Istituto di fatto si era creata l'attesa dell'eventuale dipartimentalizzazione, stante il fatto che proprio nella seconda metà degli anni '70 ormai incalzava in ambito politico e parlamentare la realizzazione di detta istituzione.

Circa l'ultimo periodo dell'Istituto, non ci furono particolari eventi se non quelli routinari che comunque varrà la pena, sotto il profilo storico, rimarcare anche per un opportuno raffronto con il periodo precedente.

Dopo la direzione di de Lucia per il 1976/77, si ebbero quelle di: Canfora (1977/79), Romano (1979/81), Trombetti (1981/primavera 1982), Alvino (1982/83), il quale fu l'ultimo prima dell'attivazione del Dipartimento.

Nel frattempo la vena contestatrice, caratterizzatasi all'incirca nella prima metà degli anni '70 (vedere pagine 30 e 31 della Nota di Miranda) e prolungatasi anche nella seconda metà, di fatto si era notevolmente attenuata, soprattutto in conseguenza dell'apertura alla partecipazione di tutti i soggetti coinvolti nell'attività dell'Istituto, per cui si era venuto a creare un clima di soddisfazione. Si era, ormai, passati da una gestione monocratica, o giù di lì, ad una collegiale. La contestazione si era ormai calmata e svuotata a seguito delle trasformazioni e delle aperture effettuate. Ciò si ebbe, ancora una volta, a Miranda, come del resto risulta nella sua Nota (vedere pagg. 30-31).

Quanto al funzionamento del Dipartimento, l'attività come già detto, iniziò in data 1.1.1984. Da tale data si sono succeduti alla direzione: S. Rionero (1984/87), F. Orecchia (1987/90), F. Mazzocca (1990/92), P. Renno (1992/95), D. Olanda (1995/1998), G. Lunardon (1998/...).

Rionero, quale primo Direttore del Dipartimento, impostò la nuova struttura, sulla base del Regolamento emanato dagli Organi di Governo dell'Ateneo, ponendo le basi per un'equilibrata gestione aperta alle novità.

Va chiaramente rilevato che le nuove strutture gestionali avevano finalmente superato il momento critico della prima metà degli anni '70, ragion per cui si ricreò un clima di serenità e di collaborazione che tuttora esiste. In effetti il coinvolgimento di tutte le componenti del Dipartimento alle attività e alla gestione di esso è stato un fatto positivo!

Peraltro è da ricordare, che il primo periodo di attività del Dipartimento, dal 1984 a tutto ottobre 1992, si svolse ancora nella sede articolata di Via Mezzocannone e in quella del settore matematico del Biennio della Facoltà di Ingegneria. L'insediamento nella nuova sede a Monte S. Angelo avvenne all'inizio dell'anno accademico 1992/93. Va anche ricordato che durante la direzione di Orecchia vi fu la significativa ristrutturazione del laboratorio didattico unico (didattico-numerico) mediante un finanziamento di circa cento milioni su fondi del Dipartimento e dell'Amministrazione universitaria e iniziò la preparazione per il trasferimento alla nuova sede. Mazzocca curò ulteriormente detta preparazione e la non facile fase del trasferimento alla nuova sede.

A Mazzocca, trasferitosi alla II Università di Napoli dall'1.11.92, successe P. Renno, secondo l'alternanza fra le componenti della Facoltà di Scienze e quella di Ingegneria. A tale proposito va richiamata la precisa Relazione dell'attività svolta da Renno al termine del suo mandato, il cui testo è disponibile presso la Direzione del Dipartimento.

In tempi recenti, da parte della componente di Ingegneria fu posta l'opportunità di una articolazione in Sezioni del Dipartimento; tale argomento fu affrontato dando mandato ad un'apposita Commissione mista costituita da: C. Ciliberto, D. Olanda, P. Renno, T. Bruno per approfondire la questione. La Commissione redasse una proposta che fu poi sottoposta al Consiglio di Dipartimento che, a seguito di alcune modifiche, l'approvò all'unanimità il 26.5.98. Fu stabilito che dette Sezioni sarebbero entrate in funzione il 15.6.98, per la durata di un anno, in via sperimentale.

#### 4.8 - FINANZIAMENTI

Nel merito va rilevato che l'argomento è riferito a quanto esposto da Miranda nella sua Nota (pag. 32-33). Per meglio dire, la situazione rimase immutata per l'ulteriore periodo di esistenza dell'Istituto e cioè dal 1976/77 a tutto il 31.12.82, allorché cessò detta struttura, attivandosi il Dipartimento a partire dall'1.1.1983. A tale proposito va ricordato che l'Università stabilì che le attività amministrative-contabili avevano periodo annuale combaciante con l'anno solare, fermo restando invece l'anno accademico per le attività didattiche.

Circa la situazione critica del problema finanziario che Miranda paventava (Vedere pag. 33 della sua Nota), si può dire che la costituzione del Dipartimento portò ad un migliore assetto finanziario dovuto, fra l'altro, da alcuni incentivi deliberati dal Consiglio di Amministrazione dell'Università, che senza dubbio hanno migliorato la situazione. D'altra parte è da dire che alcuni finanziamenti di provenienza ministeriale, quale, ad esempio, il fondo per il finanziamento ordinario delle Università, già iscritti in capitoli di spesa dello stato di previsione del MURST, sono confluiti in un unico capitolo ministeriale ripartito fra le varie Università e suddivisi per capitoli, alcuni dei quali riguardanti spese obbligatorie (come, ad esempio, quelle per gli stipendi per il personale) e spese non obbligatorie, come quella denominata 60% per l'attività di ricerca scientifica, nonché diverse altre. Ciò ha comportato che gli Organi di Governo dell'Ateneo hanno dovuto ripartire le dotazioni riguardanti spese non obbligatorie, quali quelle precedentemente citate, sulla base delle disponibilità finanziarie, naturalmente anche attraverso finanziamenti ricevuti mediante convenzioni, contratti et similia. A questo punto va ricordato che, in base al nuovo Statuto dell'Ateneo, esiste la Commissione Scientifica di Ateneo per l'elaborazione degli indicatori e per la valutazione dei risultati della ricerca. In particolare nel-

l'art. 3 del detto Statuto è stabilito che "L'Università definisce con Regolamento le modalità che consentono una equilibrata distribuzione delle risorse finanziarie destinate alla ricerca, tenuto conto di tutte le fonti di finanziamento, delle obiettive articolazioni dei settori di ricerca e delle loro effettive esigenze, nonché della qualità e della produttività delle ricerche, valutate secondo specifici criteri ed indicatori disancorati da logiche esclusivamente economiche". Comunque si rinvia all'Appendice N del Prospetto 17, nel quale è riportato il riepilogo dei finanziamenti del Dipartimento dal 1985 al 1998.

#### 4.9 - STRUTTURE DI CALCOLO

Circa l'argomento del presente punto va rilevato che rispetto alla situazione esposta da Miranda nella sua Nota (vedere pag. 35-36), in un ventennio la situazione si è notevolmente evoluta. Intanto nel periodo 1981-86 si ebbe il cambiamento al vertice del Centro di Calcolo Elettronico Interfacoltà (C.C.E.I.), istituito all'epoca con D.P.R. n. 1143 del 16.10.80 e presieduto da Carlo Ciliberto, poi trasformato in Centro Interdipartimentale di Servizio per l'Elaborazione Dati (C.I.S.E.D.), ai sensi dell'art. 90 del D.P.R. 382/80, istituito a partire dal 1°1.1987. Pertanto, poi, il C.C.E. della Facoltà di Scienze, operante in via Mezzocannone 16, fu disattivato a partire dal 1.1.1987.

Il C.I.S.E.D. ebbe la sede nel Padiglione 17 della Mostra d'Oltremare. L'utilizzazione del sistema centrale avvenne attraverso terminali periferici (punti di calcolo), installati uno presso la sede del Centro e altri localizzati essenzialmente nell'area di ciascuno insediamento universitario dell'Ateneo.

All'atto del trasferimento alla nuova sede del Complesso Universitario di Monte S. Angelo, avvenuto nel novembre 1991, il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" disponeva di attrezzature per uso didattico e scientifico situate per la quasi totalità nei locali di Via Mezzocannone, 16. Erano ivi presenti un Laboratorio Didattico ed un Punto di Calcolo del C.I.S.E.D.

In locali di Via Mezzocannone 8 esistevano poi alcune modeste attrezzature acquisite per uso scientifico, alcuni terminali collegati al C.I.S.E.D. ed un piccolo laboratorio destinato alla didattica del primo biennio, comprendente alcuni personal computers ed alcuni Macintosh, oltre a qualche stampantina. Quindi la situazione era ben altro rispetto a quella della fine degli anni '70, anche se non certamente del tutto ideale!

Alla data del 1° novembre 1991 la nuova sede dipartimentale a Monte S. Angelo non risultava dotata né di laboratori didattici di tipo informatico né, essendo stata progettata venti anni prima, di una rete telematica che consentisse di collegare apparecchiature situate nei vari locali dell'edificio con eventuali elaboratori da acquisirsi. Quindi tale situazione avrebbe reso impossibile lo svolgimento delle necessarie attività didattiche di carattere numerico-informatico, ol-

tre che lo sviluppo delle molteplici attività di ricerca all'epoca finanziate sia dal C.N.R. che dal competente Ministero. Si pose quindi il problema di effettuare una necessaria svolta di fondo e di aggiornamento.

E' utile precisare che ogni nuova realizzazione di carattere informatico nell'area di Monte S. Angelo venne articolata secondo uno standard che l'apposita Commissione rettorale "Studio Rete Informatica Insediamento Universitario di Monte S. Angelo" aveva avuto il mandato di elaborare, tenendo conto delle caratteristiche della rete STARNET. In attesa che tale Commissione completasse il proprio lavoro, gli Organi di Governo dell'Ateneo approvarono la realizzazione di un Laboratorio Informatico da allocarsi in una coppia di locali situati nel primo livello dell'edificio dipartimentale, finanziando, attraverso il C.I.S.E.D., l'acquisto e la messa in opera di: - un sistema DEC Server 5900 con lo scopo di fungere da elaboratore locale, - concentratore di terminali verso le risorse di calcolo di Ateneo, - concentratore di terminali verso le reti, - una rete locale limitata al primo livello dell'edificio per il collegamento di terminali e di altre attrezzature al DEC Server, - una dorsale verticale in fibra ottica tra la sala calcolo ed il sesto piano, priva però di diramazioni di piano.

Nello stesso tempo fu realizzato un Laboratorio di Calcolo Parallelo, costituito da un cluster di 14 workstation RISC collegato in rete Ethernet. In quel periodo, tale cluster costituiva uno dei più avanzati laboratori di tipo didattico in Europa.

Simultaneamente fu realizzata un'aula didattica dipartimentale con l'acquisizione di n. 14 workstation complete di software e collegate in rete ethernet, di 10 terminali e di una stampante di sistema a linee.

Per l'amministrazione del Dipartimento veniva infine realizzato un collegamento con il CEDA.

Soddisfatte le esigenze didattiche immediate come sopra descritto, rimase la necessità di pervenire ad un generale cablaggio dell'edificio che consentisse il collegamento al Server dipartimentale di terminali ed altre attrezzature situate negli studi e negli altri locali dell'edificio. Ebbene, nel periodo 1991-93, dopo una fitta sequenza di interventi a livello dipartimentale coinvolgenti il Rettore, il Preside della Facoltà di Scienze MM.FF.NN., il Consiglio di Amministrazione, si riuscì a concretizzare la realizzazione della rete telematica dipartimentale, da estendersi poi agli altri futuri Dipartimenti da allocarsi nella zona di Monte S. Angelo.

Le strutture di calcolo dipartimentali consistono attualmente in un parco di macchine moderne con: - una rete telematica dipartimentale, - un laboratorio didattico articolato in sala terminali, - una sala Risc (Cluster di Workstation), - una sala personal computers, - vari laboratori di ricerca facenti capo a diversi gruppi di docenti.

Alla luce di quanto esposto va rilevato che la struttura descritta, insieme con il "Centro di Calcolo" del Dipartimento, consente, allo stato attuale, l'addestramento degli allievi e il soddisfacimento degli scopi di ricerca scientifica.

#### 4.10 - CENTRO STAMPA

Provvede alla pubblicazione dei preprints e alla riproduzione di tutte le opere connesse con le attività istituzionali del Dipartimento.

### 5 - COMMENTI E FUTURO

Commenti sull'evoluzione di quanto avvenuto alla luce di ciò che ho esposto sarebbero molti e d'altra parte andrei al di là delle mie intenzioni, ma ritengo che sia opportuno e forse necessario, esprimere valutazioni e considerazioni su quella che è stata, e forse tuttora è, la sperimentazione organizzativa e didattica<sup>(21)</sup> dipartimentale e le sue conseguenze.

Va rilevato che la novità e la finalità dell'impostazione della 382/80 era quella di esperire una sperimentazione, quindi lasciata all'invenzione dei soggetti interessati, sia pure entro ambiti flessibili. Naturalmente dopo 18 anni questa impostazione metodologica è superata di fatto, anche perché nel frattempo, a seguito della legge 168/89 riguardante l'istituzione del MURST, furono stabilite:

- a) precise norme sull'autonomia finanziaria e contabile;
- b) normative riguardanti i Dipartimenti, e, inoltre, quelle riguardanti la materia statutaria delle Università (art. 16), molto più ampia e flessibile, che apriva ed ha aperto una fase molto dialettica all'interno del sistema.

Sta di fatto, però, che parecchie Università, fra cui la nostra, hanno utilizzato tale procedura, anche se non rapidamente. Ciò avvenne soprattutto per gli Atenei particolarmente congestionati, come il nostro (va anche detto che, in un certo momento, ci fu un rallentamento dovuto ad una resipiscenza, poi rientrata). Non c'è dubbio che l'innovazione statutaria ha avuto la sua positiva rilevanza in quanto ha sciolto una serie di problematiche risalenti ormai a parecchi decenni, che avevano cristallizzato la struttura. D'altra parte il nuovo Statuto del nostro Ateneo<sup>(21)</sup> ha fatto giustizia delle moltissime incrostazioni che bloccavano le modificazioni ormai indispensabili.

Ciò ricordato, va rilevato che ormai le indicazioni e i suggerimenti di cui alla circolare 266/81 sono ampiamente superate, tanto più che eventuali modificazioni, integrazioni et similia sono ormai di pertinenza degli Organi di Governo dell'Ateneo al fine di eventuali, necessari, opportuni assetti delle strutture universitarie.

Ritengo opportuno soffermarmi, al di là della sperimentazione, sull'assetto complessivo della svolta avvenuta nel 1980 circa il sistema universitario.

A distanza di due decenni dall'entrata in vigore del D.P.R. 382/80, "non c'è dubbio che occorre fare una riflessione complessiva sulla svolta avvenuta agli inizi degli anni '80, specificatamente per quanto riguarda il problema del reclutamento del personale docente e ricercatore, anche alla luce della ormai palese crisi in atto che ha bloccato i concorsi con ovvio danno delle nuove generazioni". In proposito è da rilevare che "vi sono state numerose leggi che hanno esplicitamente cambiato alcune norme del testo D.P.R. 382/80; vi sono anche state importanti leggi che hanno regolato ex novo una singola materia, con ciò facendo cadere di fatto i precedenti dettati legislativi contrastanti"(22).

In sostanza si può dire che la sperimentazione ha esaurito completamente la sua funzione, e ciò che occorre accertare è se essa ha consumato la propria carica. Probabilmente sì! Ma bisogna fare un bilancio e rilevare gli eventuali errori commessi e i correttivi da adottare, ma anche intravedere altre linee alla luce delle esperienze vissute. Atteso che, almeno per ciò che riguarda il funzionamento e l'aggiornamento dei sistemi delle strutture, ormai è da convenire che le innovazioni portate dalle strutture dipartimentali e similari: Centri interdipartimentali, Consorzi di ricerche, ecc. in un qualche modo hanno retto, ma vanno certamente sostenute anche attraverso provvedimenti innovativi alla luce delle esperienze degli ultimi decenni. Il problema più difficile rimane tuttora quello della formazione e del reclutamento. Dobbiamo purtroppo ammettere che su ciò c'è stato ancora una forte delusione e le innovazioni degli anni '70-'80 non hanno retto, talché addirittura si è dovuto rilevare, nostro malgrado, che "i sistemi precedenti avevano pure qualche pregio e la regolarità sia delle scadenze concorsuali che dei meccanismi di selezione è ben più arrugginita e nello stesso tempo ben più rischiosa di quanto i più sprovveduti (o i più ingenui?) ritenessero nel 1980: si adatterebbe qui più che bene l'antico adagio "fatta la legge, scoperto l'inganno"(23).

Quanto alla sperimentazione, dopo venti anni è da dire che forse è quella che in qualche modo è riuscita e, a mio avviso, non è fallita, anche se vanno riscontrate anomalie, discrasie, ecc.. Certamente, e non poteva che essere così, ha in qualche modo rallentato i procedimenti funzionali e decisionali, ma ciò è la conseguenza dell'ampia apertura al coinvolgimento quanto più vasto possibile delle varie componenti; non c'è dubbio che la trasparenza è stata ampia e necessaria in un sistema di partecipazione collettiva, sia pure con alcune discrasie che infine sono state superate, anche se con ovvio rallentamento.

Credo che si possa ben dire che le considerazioni finali della Nota di Miranda erano più che legittime, ma tutto sommato esse hanno avuto una corrispondenza nel suo pensiero, forse possiamo dire "vecchi" e "giovani", allora come oggi, avevano ragione e torto!

Certo sono ancora sul tappeto non pochi problemi di una certa rilevanza, fra cui l'equivoco del "dottorato di ricerca" in relazione al "momento canonico del reclutamento che formalmente rimane quello del ricercatore che obiettivamente non dovrebbe essere fortemente condizionato dal possesso del titolo di dottore di ricerca". Si è venuta così a creare di fatto una scaletta dottori di ricerca-ricercatori, non accettabile, tenuto conto che la formazione dei dottori di ricerca riguarda, nell'idea del legislatore, la necessità di creare condizioni efficaci per reclutare personale di ricerca, concernente l'ampio sistema produttivo del Paese, al di là di quello riguardante le strutture di ricerca universitaria. E questo è un punto che è certamente fallito!

All'uopo ritengo opportuno effettuare alcune considerazioni sul sistema universitario italiano.

La caratteristica principale di tale sistema è che esso "è quasi completamente pubblico, con scarsi apporti di risorse da parte dei privati in cui prevale (almeno formalmente) l'eguaglianza delle opportunità offerte dalle singole sedi, rispetto ai meccanismi di competizioni tra le varie Università, tipici di altre realtà sia in Europa che negli U.S.A.". A ciò si aggiunge il fatto che il sistema italiano ha una pesante inerzia, sia per antiche tradizioni e per una sorte di conservazione in ampi settori del mondo accademico, sia per la sua appartenenza al pubblico impiego, legata cioè alla famosa questione della "legalità del titolo di studio"<sup>(24)</sup>.

In questa situazione fondamentalmente di inerzia, l'attuazione delle novità introdotte dal D.P.R. 382/80 è andata molto a rilento o addirittura c'è stata l'inattuazione di molte novità introdotte. D'altra parte il sistema si è adagiato sullo sforzo effettuato per definire la recente legislazione, abbandonando di fatto l'attuazione della nuova normativa che non si è ancora completata dopo circa 18 anni. In effetti, congiunto a ciò, va rilevato che dopo i notevoli sforzi diretti ad una riforma forte, avvenuti nel periodo degli anni '70-'80, è stata carente la volontà politica dell'attuazione dei dettati legislativi. Molti sono i casi che si possono rilevare, di negativo o ignorato intervento di attuazione. Fra questi è sintomatico - specificatamente negativo - l'attuazione del dottorato di ricerca, punto cardine per una nuova politica di reclutamento dei futuri docenti, quindi rivolta a cambiare radicalmente le impostazioni altamente caotiche e spesso casuali del periodo '50-'70. La stessa impostazione del dottorato di ricerca è stata fortemente chiusa all'interno dell'Università, quasi, o per meglio dire, di fatto volta a creare una sorta di pre-reclutamento di nuove leve, soprattutto nel sistema universitario (ex assistenti volontari!, assistenti straordinari!), creando così delle aspettative che non potevano essere soddisfatte. Scarso, peraltro, è stato l'interesse - su tale materia - di una buona parte del mondo accademico. Lo stesso discorso vale per il sistema delle borse di studio!

Ciò nonostante il D.P.R. 382/80 "ha modificato sostanzialmente la realtà universitaria italiana soprattutto per quanto riguarda il finanziamento pubblico

della ricerca, lo status del personale docente, la realizzazione dei Dipartimenti", oltre ad altri importanti interventi in esso previsti.

Queste sono alcune osservazioni e valutazioni a margine delle modificazioni avvenute negli anni '80, molte altre si possono fare sull'impostazione intrapresa, ma ciò richiederebbe spazi e tempi non brevi, peraltro non pienamente concernenti con l'impostazione di questa Nota.

In questa si è voluto dare soltanto una indicazione di quanto è avvenuto in circa 50 anni di cambiamenti del pianeta Università, in relazione alla Storia della Scuola Matematica Napoletana. Va ricordato, peraltro, che già da alcuni mesi il Ministro competente ha aperto un percorso per una revisione riguardante: "Nuove norme per il reclutamento dei ricercatori e professori universitari di ruolo", che, ormai, come già esposto in precedenza ha risolto in buona parte un contenzioso difficilmente risolvibile!

Una considerazione critica va fatta circa i rapporti fra Università e Mondo produttivo. In effetti gli strumenti varati soprattutto verso la fine degli anni '70 in relazione a detto rapporto, quale ad esempio quello dei Consorzi di ricerca fra Università e Industrie, non ha funzionato, per una situazione di base che non si è stati capaci di risolvere. Molte delle iniziative languono o addirittura si sono disciolte o si avviano alla dissoluzione. Non c'è dubbio che occorrerà impostare una strategia ben più vigorosa e credibile!

Alla luce di quanto esposto ritengo opportuno concludere con una considerazione circa il futuro della nostra Scuola: pur tuttora consapevole del segnale di Miranda nella conclusione della sua Nota, peraltro annientata dalle riserve della crisi che sta vivendo il nostro Paese, l'intensa attività della nostra Scuola induce un cauto ottimismo sul suo futuro. E ciò in quanto siamo sorretti dalle notevoli tradizioni che ci rinvigoriscono, dall'impegno e dalla serietà dei precedenti e degli attuali attori!

Hanno collaborato a fornire indicazioni, dati, suggerimenti, ed altro:

Sergio Bagnulo	Teresa Bruno	Lucio Carbone
Guido Celentano	Nello Chambery	Anna Colucci
Francesco De Giovanni	Paolo De Lucia	Giuseppe De Martino
Claudio De Pietro	Luisa Falanga	Paolo Fergola
Carlo Ferraro	Alberto Fiorenza	Giulio Giunta
Giuseppe Giunto	Aurea Hermann	Marina Iocco
Giuliano Laccetti	Mario Rosario Occorsio	Domenico Olanda
Ferruccio Orecchia	Michele Orefice	Almerico Murli
Aldo Pinto	Pierantonio Prinzi	Luigi Maria Ricciardi
Salvatore Rionero	Carlo Sbordone	Luciana Sepe
Carmine Tesone	Roberto Tortora	Guido Trombetti

che ringrazio sentitamente.

## ELENCO APPENDICI

- 1 - **Appendice A:** Serie di fotografie di spazi e di modelli museali situati nella Sede di via Mezzocannone n. 8
- 2 - **Appendice B:** Prospetto n. 1 (Grafico personale non docente)
- 3 - **Appendice C:** Prospetti nn. 2 e 3 (Elenco docenti di prima e seconda fascia)
- 4 - **Appendice D:** Prospetti nn. 4, 5, 6, 7, 8, 9 (Grafici personale: docenti, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica)
- 5 - **Appendice E:** Prospetti nn. 10 e 11 (Grafici studenti immatricolati, laureati)
- 6 - **Appendice F:** Prospetto n. 12 (Contrattisti)
- 7 - **Appendice G:** Prospetto n. 13 (Elenco supplenze)
- 8 - **Appendice H:** Rivista "Ricerche di Matematica"
- 9 - **Appendice I:** Prospetto n. 14 (Preprints)
- 10 - **Appendice L:** Prospetto n. 15 (Borse per corsi Dottorato di ricerca)
- 11 - **Appendice M:** Prospetto n. 16 (Borse Dottorato di ricerca finanziati da INDAM)
- 12 - **Appendice N:** Prospetto n. 17 (Finanziamenti)

## APPENDICE A

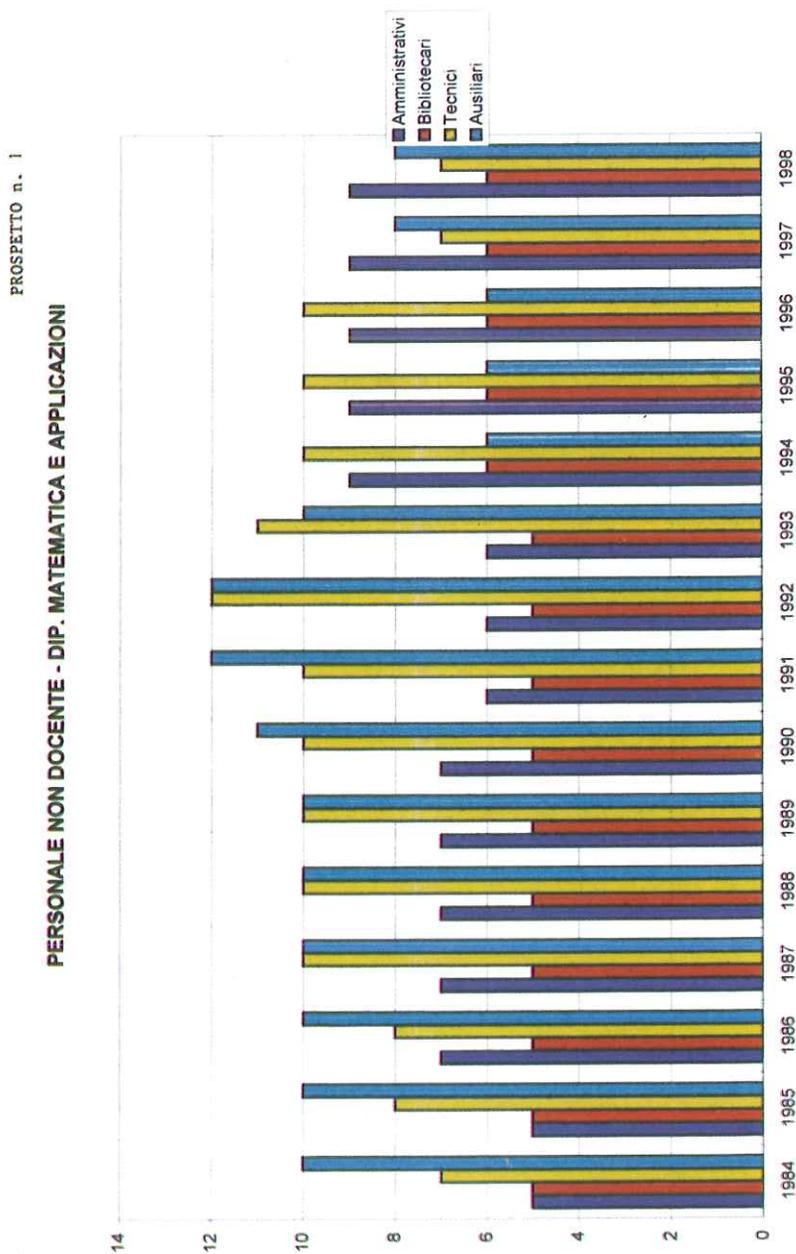
Serie di fotografie di spazi e di modelli museali  
situati nella sede del Dipartimento di Matematica e Applicazioni  
di Via Mezzocannone n. 8

Si rinvia alle note

- 1) L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino - *Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"*, Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Vol. LXIII, (1996) pp. 33-65.
- 2) L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino - *Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II": cataloghi ragionati*, Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Vol. LXV, (1998) pp. 93-257.

### APPENDICE B

Grafico personale non docente



## APPENDICE C

Elenco docenti di prima e seconda fascia attualmente in servizio

## PROFESSORI DI I FASCIA

## AREA MATEMATICA

COGNOME E NOME	SETTORE SC. DISCIPLINARE
1. ALVINO Angelo	A02A - Analisi Matematica
2. BUONOCORE Pasquale	A02A - Analisi Matematica
3. CANFORA Albino	A02A - Analisi Matematica
4. CARBONE Luciano	A02A - Analisi Matematica
5. COTI ZELATI Vittorio	A02A - Analisi Matematica
6. CURZIO Mario	A01B - Algebra
7. DE ARCANGELIS Riccardo	A02A - Analisi Matematica
8. DE GIOVANNI Francesco	A01B - Algebra
9. DE LUCIA Paolo	A02A - Analisi Matematica
10. GIARRUSSO Ester	A02A - Analisi Matematica
11. GRASSINI Renato	A03X - Fisica Matematica
12. LUBARDON Guglielmo	A01C - Geometria
13. METELLI Claudia	A01B - Algebra
14. MURLI Almerico	A04A - Analisi Numerica
15. OCCORSIO Mario Rosario	A04A - Analisi Numerica
16. OLANDA Domenico	A01C - Geometria
17. ORECCHIA Ferruccio	A01C - Geometria
18. RICCIARDI Luigi Maria	A02B - Probabilità e Statica Mat.
19. RIONERO Salvatore	A03X - Fisica Matematica
20. ROMANO Antonio	A03X - Fisica Matematica
21. RUSSO Elvira	A02A - Analisi Matematica
22. SBORDONE Carlo	A02A - Analisi Matematica
23. TROMBETTI Guido	A02A - Analisi Matematica
24. VISENTIN Francesca	A03X - Fisica Matematica

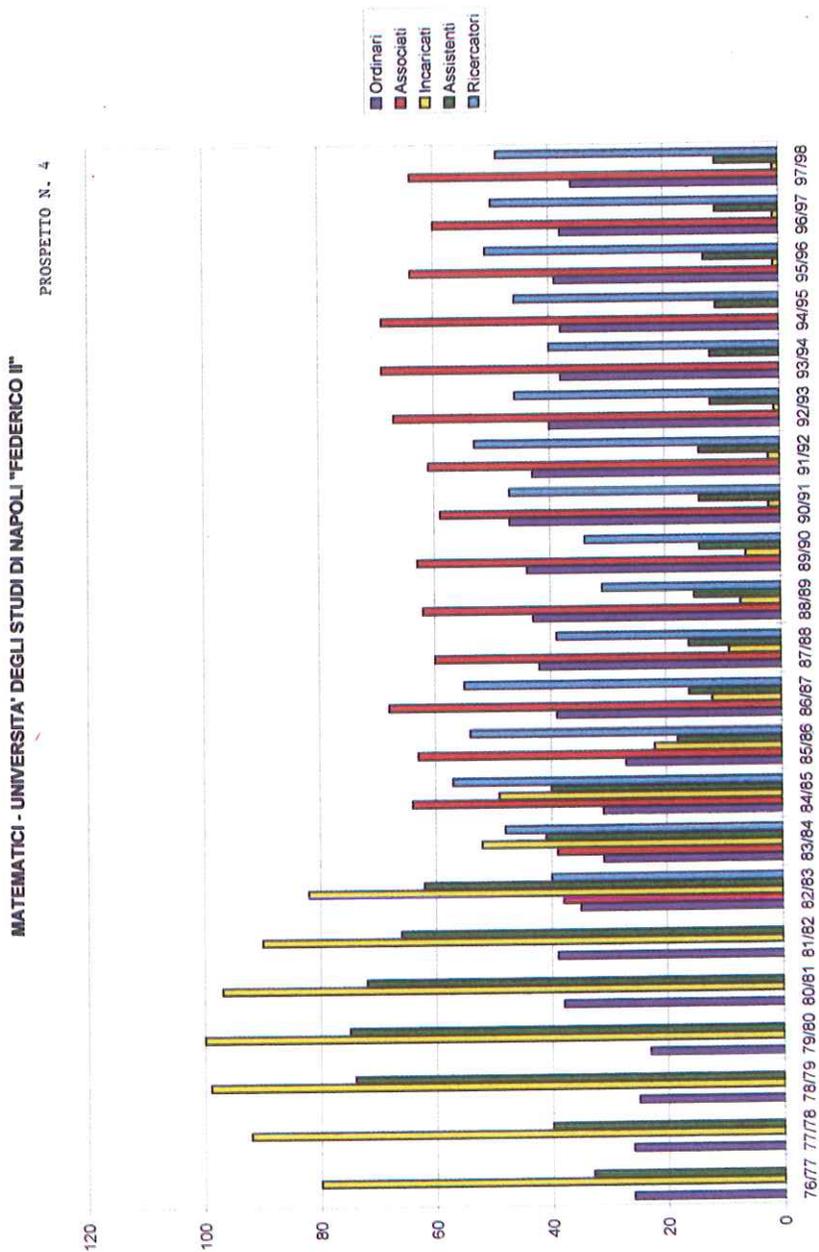
PROFESSORI DI II FASCIA

AREA MATEMATICA

1.	BIACINO Loredana	A02A - Analisi Matematica
2-	CARRESE Rosalba	A02A - Analisi Matematica
3.	COLAPS Gennaro	A01C - Geometria
4.	CRISCUOLO Giuliana	A04A - Analisi Numerica
5.	D'ANDREA Anna Bruna	A02A - Analisi Matematica
6.	DE VIVO Clorinda	A01B - Algebra
7.	DI FIORE Lora	A01C - Geometria
8.	DRAGOTTI Sara	A01C - Geometria
9.	ESPOSITO Rosa	A01C - Geometria
10.	ESPOSITO Vincenzo	A02A - Analisi Matematica
11.	FERGOLA Paolo	A03X - Fisica Matematica
12.	FRANCIOSI Silvana	A01B - Algebra
13.	GIORDANO Gabriele	A01B - Algebra
14.	GUARIGLIA Emma	A02A - Analisi Matematica
15.	GUERRIERO Gabriele	A03X - Fisica Matematica
16.	IANNECE Donatella	A03X - Fisica Matematica
17.	LACCETTI Giuliano	A04A - Analisi Numerica
18.	LO RE Pia Maria	A01C - Geometria
19.	LOMONACO Luciano	A01C - Geometria
20.	LONGOBARDI Patrizia	A01B - Algebra
21.	MIGLIACCIO Lucia	A02A - Analisi Matematica
22.	MORELLI Aldo	A01D - Matematiche Complementari
23.	NANIA Luciana	A02A - Analisi Matematica
24.	NAPPI Luigi	A02A - Analisi Matematica
25.	PARLATO Lucio	A01C - Geometria
26.	RAO Salvatore	A01B - Algebra
27.	RUSSO Assunta	A01C - Geometria
28.	STERI Stefano	A02A - Analisi Matematica
29.	TENNERIELLO Catello	A03X - Fisica Matematica
30.	TORTORA Roberto	A01D - Matematiche Complementari
31.	TRICARICO Maria Rosaria	A02A - Analisi Matematica
32.	VOLZONE Gaetano	A01C - Geometria
33.	ZECCA Pasquale	A02A - Analisi Matematica

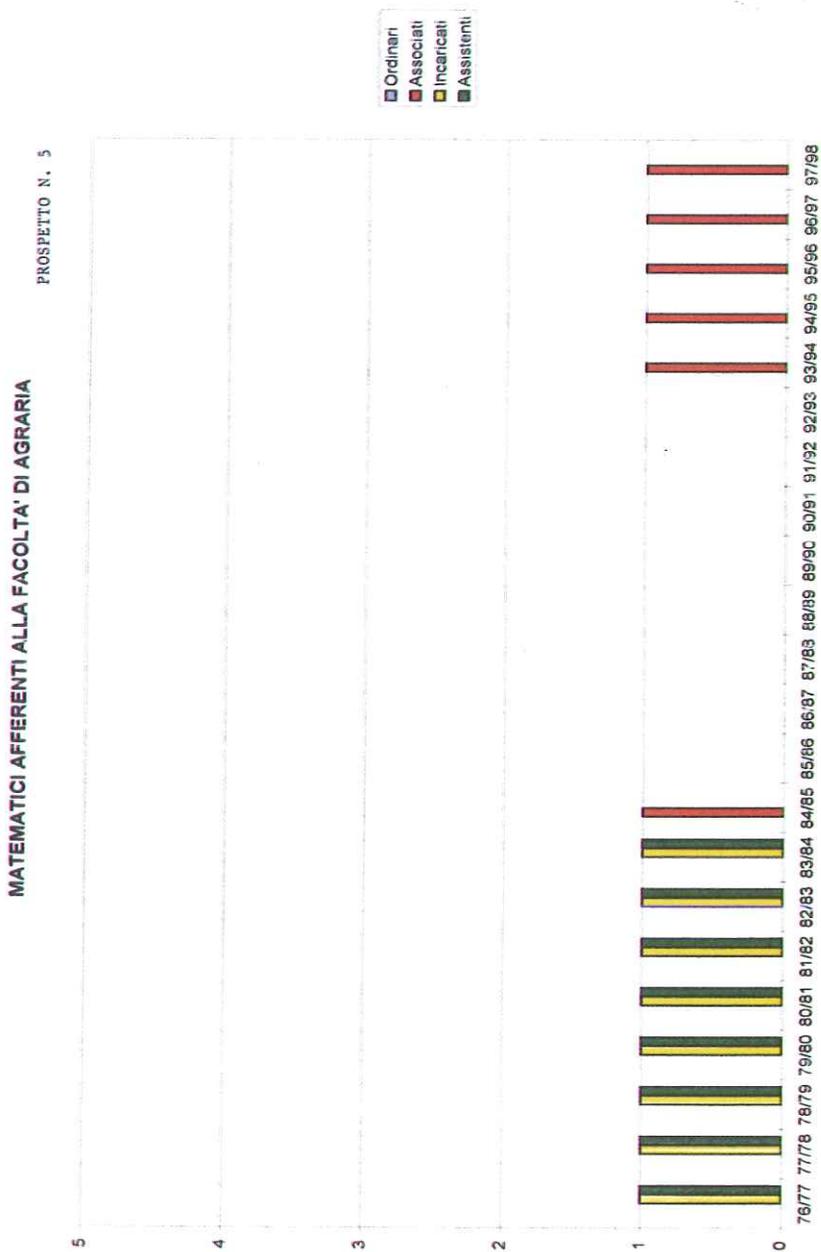
APPENDICE D

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



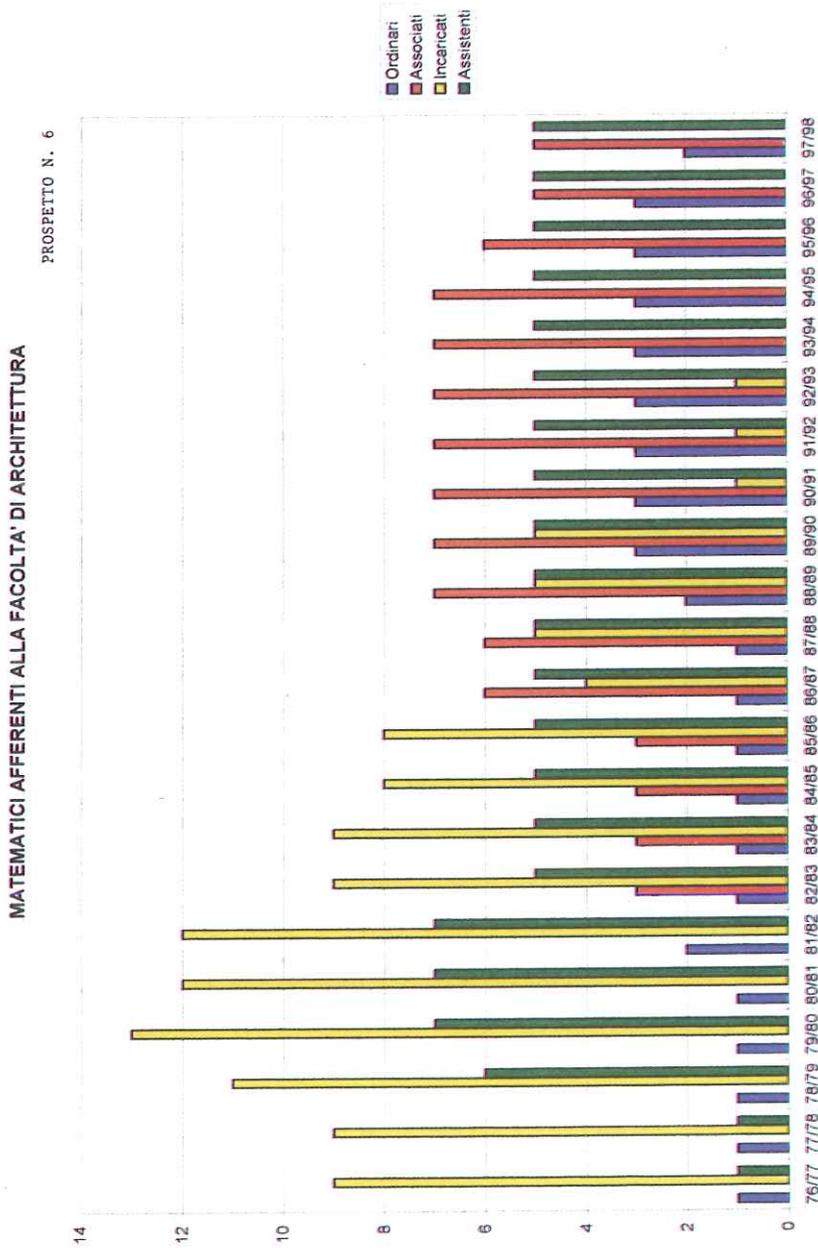
Segue APPENDICE D

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



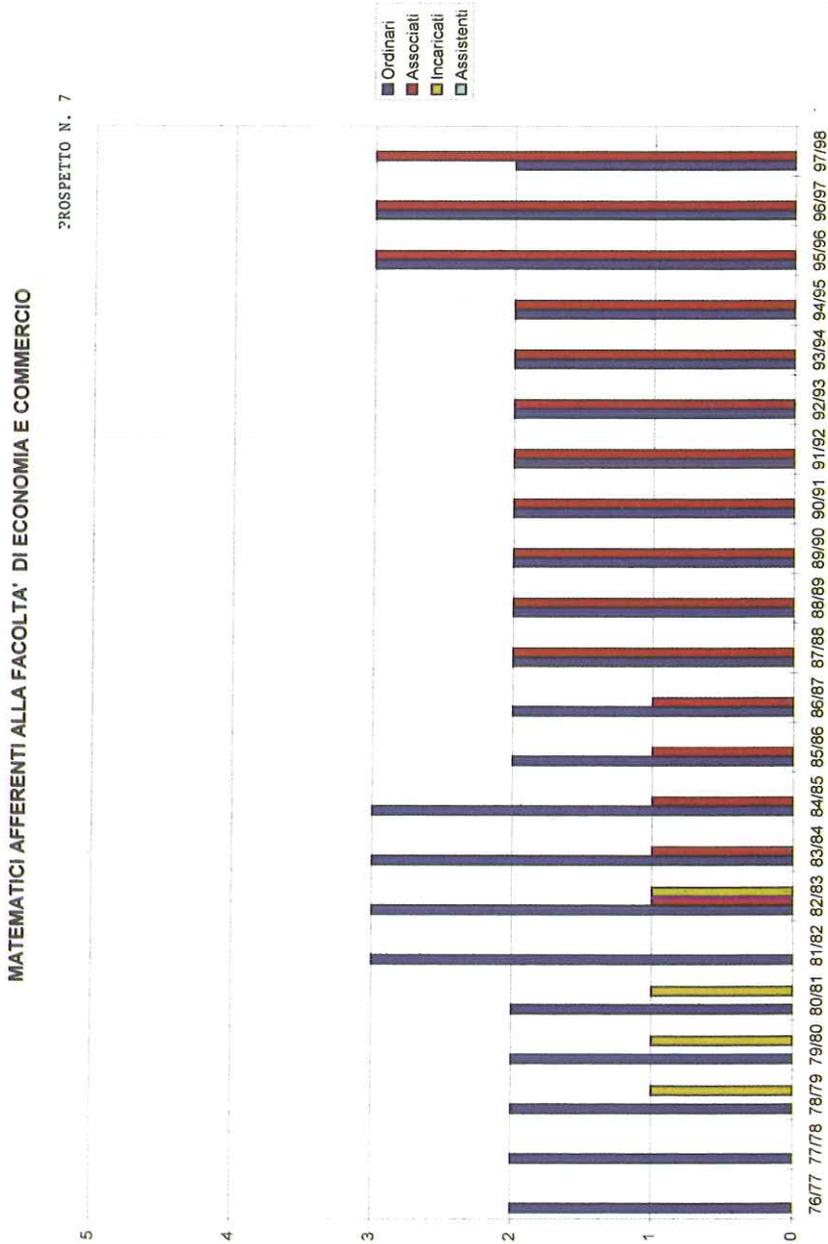
Segue **APPENDICE D**

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



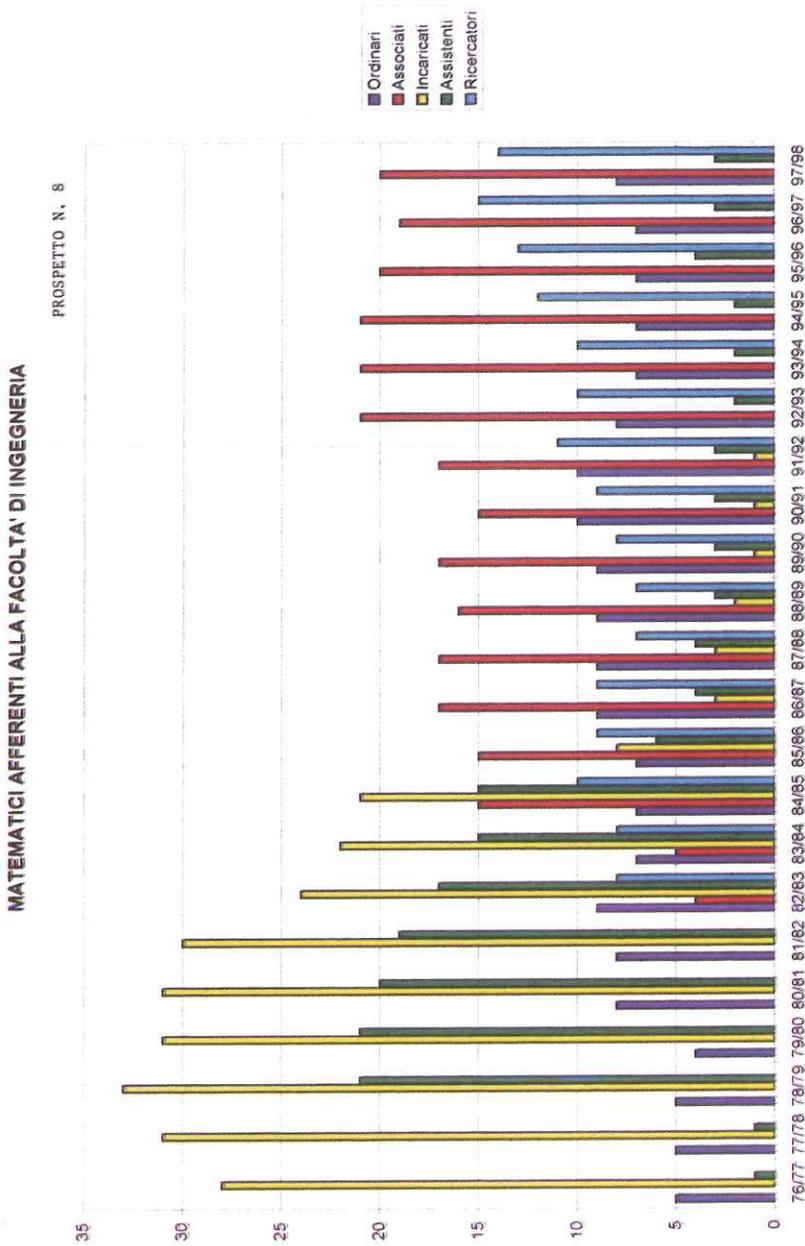
Segue APPENDICE D

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



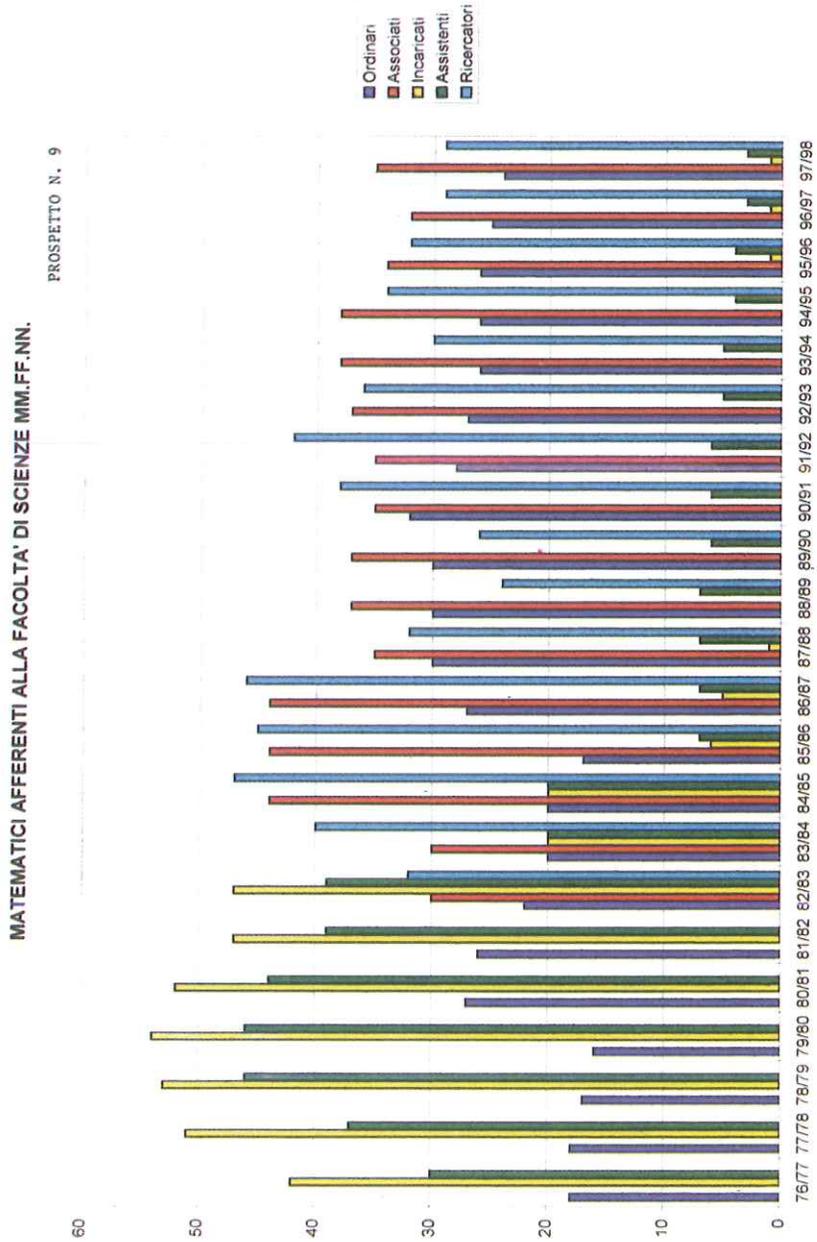
Segue APPENDICE D

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



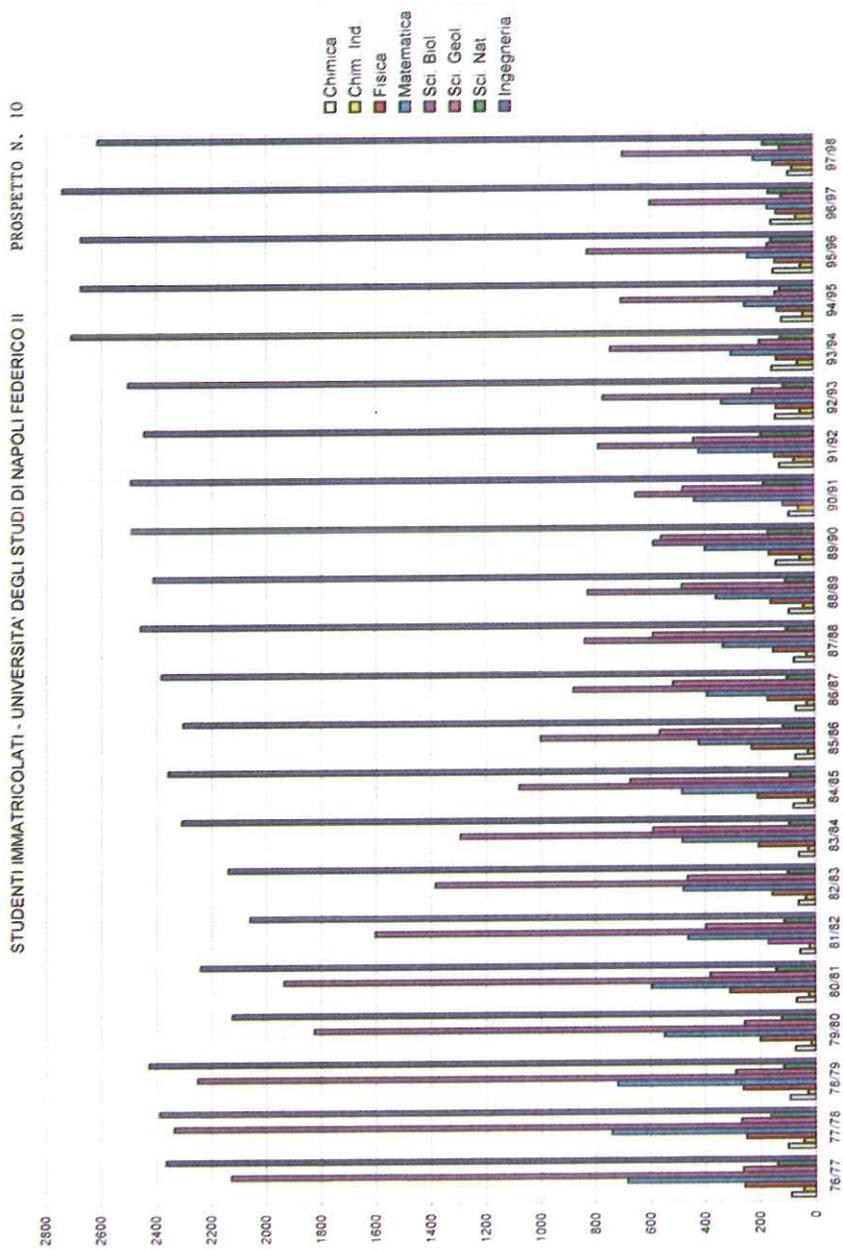
Segue APPENDICE D

Grafici personale: docenti di prima e seconda fascia, incaricati, assistenti, ricercatori dell'area matematica.



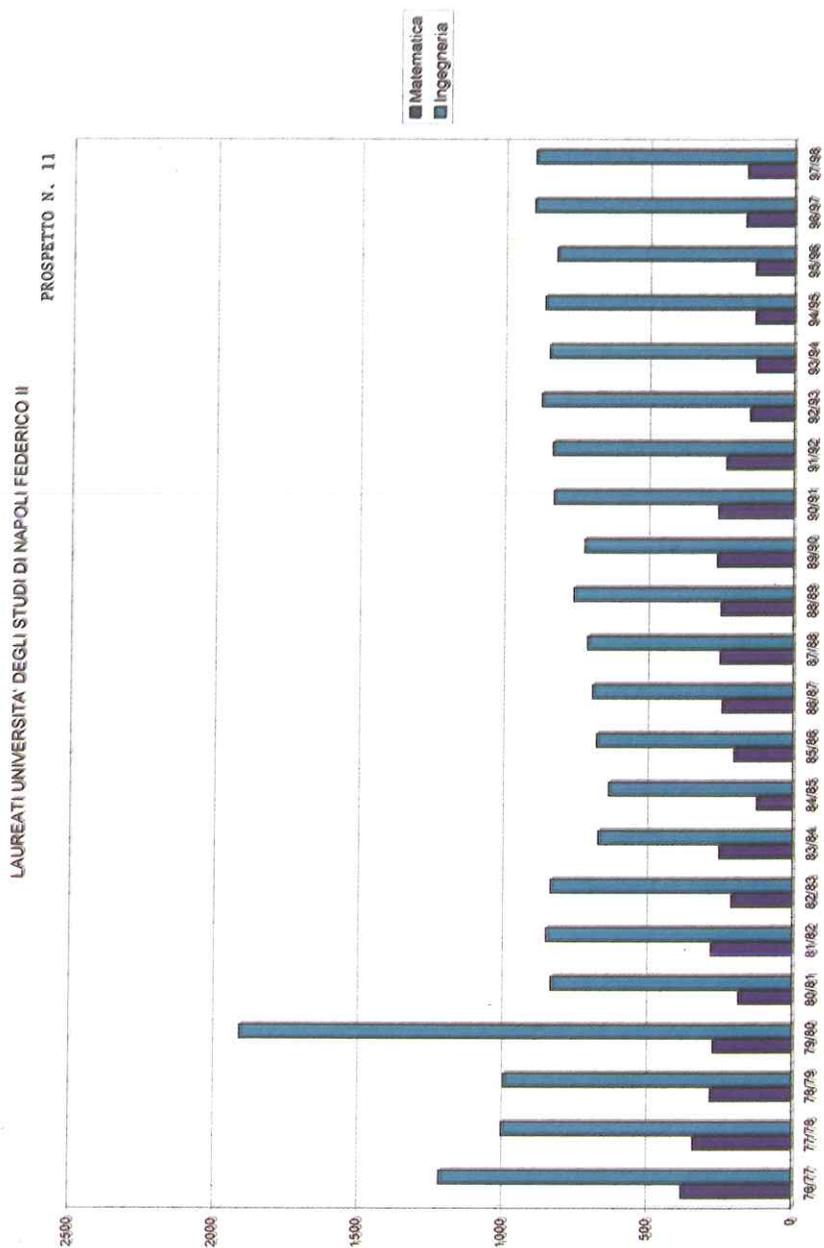
### APPENDICE E

Grafici studenti immatricolati e laureati



Segue APPENDICE E

Grafici studenti immatricolati e laureati



**Prospetto n. 12****APPENDICE F**Corsi integrativi attivati dal c.d.l. in Matematica dall'a.a. 1981/82 al 1997/98**a.a. 1981/82**

- Algebra superiore Prof. D. PERRIN (Francia)

**a.a. 1982/83**

- Teoria dell'Informazione Prof. S. SATO (Giappone)  
- Geometria Superiore Dr. J. C. FISCHER (Canada)

**a.a. 1983/84**

- Istituzioni di Analisi Superiore Prof. P. MANDL (Cecoslovacchia)

**a.a. 1985/86**

- Geometria II Prof. T. NOIRI (Giappone)  
- Analisi Numerica Prof. P. Messina (U.S.A.)  
- Analisi Superiore Prof. H. TAKEYUKI

**a.a. 1986/87**

- Statistica Matematica Prof. S. SATO (Giappone)

**a.a. 1988/89**

- Analisi Superiore Prof. R. Wheeden  
- Calcolo Numerico e Programmazione Prof. P. Messina (U.S.A.)

**a.a. 1989/90**

- Analisi Funzionale Prof. N. MOHAN

**a.a. 1990/91**

- Analisi Superiore Prof. F.C. CLARKE  
- Calcolo Numerico e Programmazione Prof. P. NEVAI  
- Statistica Matematica Prof. F. PICHLER

**a.a. 1991/92**

- Geometria Superiore Prof. U. OTT  
- Calcolo delle Probabilità Prof. T. HIDA

**a.a. 1992/93**

- Equazioni Funzionali Prof. P.L. LIONS

**a.a. 1993/94**

- Equazioni Funzionali Prof. T. IWANIEC  
- Istituzioni di Algebra Superiore Prof. M.L. NEWELL

**a.a. 1995/96**

- Teoria delle Funzioni Prof. A. DVURECENSKIJ  
- Calcolo delle Probabilità Prof. S. SATO

**a.a. 1996/97**

- Teoria delle Funzioni Prof. A. DVURECENSKIJ  
- Calcolo delle Probabilità Prof. S. SATO

**a.a. 1997/98**

- Istituzioni di Fisica Matematica Prof. G. DI GIUGNO  
- Calcolo Numerico e Programmazione II Prof. P. Messina

**Prospetto n. 13****APPENDICE G**

Elenco del numero delle supplenze o degli affidamenti retribuiti  
ovvero non retribuiti degli insegnamenti scoperti (ex Art. 9 D.P.R. n. 382/80,  
Art. 100, D.P.R. n° 382/80, Art. 1 , Legge 477/84, Art. 12 legge 341/90  
e successive modificazioni, negli anni accademici dal 1981/82 al 1997/98

<u>Anni Accademici</u>	<u>Totali supplenze</u>
1981/82	6
1982/83	5
1983/84	17
1984/85	13
1985/86	13
1986/87	10
1987/88	15
1988/89	19
1989/90	12
1990/91	4
1991/92	26
1992/93	20
1993/94	24
1994/95	26
1995/96	32
1996/97	33
1997/98	30

## APPENDICE H

### RIVISTA "RICERCHE DI MATEMATICA"

(a cura del dott. Alberto Fiorenza)

#### VOLUMI PUBBLICATI

Alcuni volumi non sono suddivisi in due fascicoli, precisamente quelli relativi agli anni **1955, 1959, 1960, 1961, 1966, 1967, 1968, 1969**; altri sono suddivisi in due fascicoli pubblicati con un'unica copertina (anni **1952, 1957, 1958**).

Totale "libri" pubblicati (tra fascicoli separati e riuniti): **80**.

Esistono tre supplementi, relativi agli anni **1987** (dedicato a Miranda), **1991** (dedicato a Caccioppoli), **1992** (dedicato a Tolotti).

#### MEMORIE

Sono state pubblicate Memorie in ogni volume dal primo **1952** fino al **1968**. Successivamente sono state pubblicate: **1** memoria nel **1972** (Fasc. 1), **1** memoria nel **1973** (Fasc. 1), **2** memorie nel **1975** (Fasc. 2); l'ultima memoria pubblicata è nel **vol. 25, Fasc. 2, 1976**.

Generalmente in ogni volume le Memorie sono state pubblicate in numero di gran lunga minore rispetto alle Note: solo del Vol. **5**, fasc. **1, 1956** esistono più memorie che Note (**5** Memorie e **2** Note).

Il numero massimo di Memorie in un volume è stato **6** (negli anni **1958** e **1960**).

#### ARTICOLI

La media del numero degli articoli (un articolo è una Memoria o una Nota) pubblicati in un volume è **18.7**.

Il numero massimo di articoli pubblicati in un volume è **36** (nel **1995**).

Il numero minimo di articoli pubblicati in un volume è **11** (nel **1961** e nel **1975**).

#### NAZIONALITA'

Numero degli articoli con almeno un ricercatore italiano come autore: **706** (circa l'**85%** del totale).

Numero degli articoli con almeno un ricercatore napoletano come autore: **417** (circa il **50.6%** del totale).

Numero degli articoli con almeno un ricercatore straniero come autore: **135** (circa il **16.3%** del totale).

Confrontando i dati su riportati con il numero dei ricercatori italiani, napoletani e stranieri, si evince che i ricercatori napoletani, pur rappresentando circa il **28%** dei ricercatori che hanno contribuito allo sviluppo della Rivista, hanno prodotto più della metà degli articoli pubblicati.

Inoltre pur essendoci ricercatori stranieri che hanno presentato più di un articolo sulla Rivista (circa **117** ricercatori contro **135** articoli), e pur rappresentando circa il **25%** dei ricercatori che hanno contribuito allo sviluppo della Rivista, hanno prodotto circa il **16.3%** degli articoli pubblicati.

Il primo articolo in lingua straniera prodotto da un ricercatore straniero è stato pubblicato nel vol. **5** Fasc. **1** del **1956** (autore francese, lingua francese).

Il totale degli articoli pubblicati in lingua francese fino a tutto il 1995 è **23** (circa il **2.7%**).

Il primo articolo in lingua inglese è stato pubblicato nel vol. **9**, del **1960**.

Il totale degli articoli pubblicati in lingua inglese fino a tutto il 1995 è **302** (circa il **36.6%**).

Un incremento del numero degli articoli in lingua inglese si è registrato nel **1978** (vol. **27**, Fasc. **2**) con **6** articoli in inglese e **9** in italiano.

E' del **1979** l'ultimo volume della Rivista contenente solo articoli in lingua italiana.

Dal **1986** ad oggi gli articoli scritti in lingua straniera superano quelli scritti in lingua italiana

Non esistono articoli in lingua tedesca.

**APPENDICE I**

Elenco numerico dei "Preprints" pubblicati a cura del Dipartimento  
dal 1981 al 1997

1981	2
1982	73
1983	92
1984	134
1985	58
1986	31
1987	66
1988	63
1989	70
1990	85
1991	54
1992	65
1993	58
1994	76
1995	67
1996	111
1997	<u>85</u>
	1.170

**Prospetto n. 15****APPENDICE L**Elenco borse di studio per corsi Dottorato di ricerca  
in Matematica e in Matematica Applicazioni e Informatica

	Matematica n. borse	Matem. Appl, e Informatica n. borse
I ciclo, 85/86:	5	5
II ciclo, 86/87:	5	5
III ciclo, 87/88	6	6
IV ciclo, 88/89	8	7
V ciclo, 89/90	8	7
VI ciclo, 90/91	8	9
VII ciclo, 91/92	8	8
VIII ciclo, 92/93	9	9
IX ciclo, 92/94	8	9
X ciclo, 94/95	9	10
XI ciclo, 95/96	10	10
XII ciclo, 96/97	9	8
XIII ciclo, 97/98	9	9
XIV ciclo, 98/99	9	8

**APPENDICE M**

Elenco Borse di Studio finanziate dall'INdAM per i corsi di dottorato  
con allegato l'elenco degli insegnamenti svolti a cura dell'INdAM

1997     5

1998     9

## APPENDICE N

## Finanziamenti

ANNO	Contr. Ord.	Biblioteca	Manul. Ord.	Dottorato	Ass. strandard.	Contr. Lab.	Interessi	Attr. Didatt.	MPI 40%	MPI 60%	Contratti CNR	Contr. CNR	Ric. Matem.	Contr. Conv.	Convegni	Altro	Totale entrate
1985	329.230.640	48.975.268	50.800.000	10.000.000			71.138.863	20.000.000	233.260.000	11.063.613	32.860.000		8.873.200				816.201.584
1986	311.002.320	113.764.515	18.750.000	31.797.688	5.000.000	42.811.430	102.126.724	764.640	336.290.066	404.250.000	31.740.000		5.140.800	3.936.000			1.407.374.183
1987	294.902.090	48.565.119		35.250.000	15.000.000	26.734.257	95.362.237			487.920.000	53.000.000					500.000	1.057.253.703
1988	294.902.090	97.962.900		17.000.000	40.000.000	34.584.056	131.718.326	44.459.000	234.442.696	451.230.880	56.150.000		4.593.600			4.865.599	1.411.909.147
1989	294.902.090	60.432.850			10.000.000	24.565.200	146.514.514	31.853.000	259.753.527	546.033.886	33.710.000					60.000.000	1.467.765.067
1990	294.902.090	63.256.190		25.500.000	63.000.000	51.439.320	144.245.749	76.609.250	300.319.218	565.638.686	210.000.000		3.456.000			10.000.000	1.807.346.503
1991	294.902.090	67.090.590		34.000.000	1.000.000	25.949.080		15.940.000	391.797.950	521.029.138	397.792.452	12.300.000	4.953.600		73.200.000	9.913.982	1.850.528.852
1992	295.000.000	72.592.810		41.400.000	6.000.000	27.029.080		112.436.410	316.404.843	502.758.215	207.741.210	10.300.000	9.849.600	47.974.764		35.000.000	1.698.903.868
1993	295.000.000	77.117.712		43.000.000		32.890.444		43.457.310	314.430.000	512.334.971	345.479.284		2.844.000	117.983.187		30.678.238	1.845.205.146
1994	295.000.000	61.042.720		49.800.000	15.000.000	26.793.238		66.160.000	353.760.000	502.408.000	251.250.764	117.705.000	21.611.200		21.060.000	3.243.686	1.784.834.608
1995	295.000.000	63.910.800		72.000.000	1.600.000	40.927.007		133.500.000	229.900.000	449.508.120	28.585.731	3.067.650	14.188.800	18.000.000	56.000.000	13.706.404	1.419.894.512
1996	256.300.000	70.000.000		76.300.000		107.837.807		17.800.000	174.540.000	731.378.920	7.191.737	26.500.000	22.390.400	12.000.000	13.000.000	37.406.407	1.552.845.271
1997	287.500.000	63.000.000		69.000.000	110.000.000	107.837.807		50.000.000	324.450.000	71.000.000		31.000.000	14.773.600	10.000.000	5.000.000	95.612.707	1.239.174.114
1998	262.587.000	75.000.000		198.000.000		35.300.000		350.000.000	847.000.000	478.500.000		28.000.000	2.500.000		15.000.000	77.000.000	2.368.887.000

## NOTE

- (1) Su tale argomento tenni una Conferenza ai Colleghi matematici e ai loro allievi della Seconda Università degli Studi di Napoli il 7 giugno 1994 e altre due il 9 maggio e il 19 giugno 1996 a "Napoli Nobilissima", RISMA Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II".
- (2) Vedere le Note (2), (3), (4), (7), (12), (13), (17), (18), (19), (25), (26) della Bibliografia de "La prolusione:alcuni aspetti della Scuola Matematica Napoletana" effettuata da Salvatore Rionero in occasione dell'Inaugurazione dell'Anno Accademico 1995/96 dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II", riportata nel Notiziario di detta Università A II, n.7, Nuova serie, nonché la Nota di Lucio Carbone, Giuseppe Cardone, Franco Palladino del Rend. Acc. Sc.fis.-mat.. Napoli vol. LXIII, (1966) pp. 33-65, nelle cui pagine da 61 a 63 sono riportati modelli e strumenti.
- (3) Il Dipartimento di Matematica e Applicazioni fu intitolato a Renato Caccioppoli, ovviamente in prosecuzione a quanto già fu a suo tempo deliberato dalla Facoltà per l'ex Istituto di Matematica.
- (4) Vedere art. 1 del D.P.R. 382/80.
- (5) Circa la denominazione degli insegnamenti si adottano le terminologie del D.P.R. 26.7.1960, n.1692 e di quelle introdotte successivamente, almeno fino a innovazioni di cui è detto in prosieguo.
- (6) Trasferimento interno all'insegnamento di Teoria delle Funzioni dall'a.a. 88/89.
- (7) G.Letta nella Commemorazione di F. Cafiero pubblicata nel B.U.M.I. (5) 18-A(1981), 347-355 così conclude: "Aggiungiamo che la prosa matematica di Cafiero, sempre austera e misurata, preziosa e mai prolissa, dal sapore talvolta un po' arcaico o letterario (che tanto piaceva al suo amico Nikodym), contrasta singolarmente con quello stile sciatto e anonimo "che sembra destinato a diventare la norma matematica italiana dei giorni nostri".
- (8) Si richiama l'attenzione sull'art.3 del D.P.R. 382/80, già citato più volte.
- (9) Si avverte che a fianco del nominativo di ciascun docente è indicata la sola data di inizio (decorrenza giuridica) per quelli ancora in servizio, mentre per coloro che si sono trasferiti in altra sede o sono deceduti è indicato l'anno in cui ciò è avvenuto.
- (10) Trasferitosi poi ad altro Ateneo italiano su disciplina matematica.
- (11) Per trasferimento dall'Istituto Universitario Navale. In quiescenza a partire dall'1.12.96.
- (12) Trasferimento interno alla cattedra di Istituzioni di Matematiche dall'a.a.88/90
- (13) Vedasi caso Prof. Orecchia.
- (14) Trasferimento interno ad Istituzioni di Geometria Superiore.
- (15) Proveniente dall'Università di Salerno, allievo della nostra Scuola.
- (16) La Professoressa Giarrusso è stata allieva della nostra Scuola: laureatasi in Matematica nella Facoltà di Scienze MM.FF.NN., è stata borsista C.N.R., poi dall'1.6.76 assegnista, indi Ricercatore confermata con decorrenza giuridica dal 9.5.87, poi Ordinario di Analisi Matematica all'Università di Messina dal 9.5.1987, in seguito Ordinario di Istituzioni di Matematiche prima a Salerno e poi a Napoli, indi di Analisi Matematica a Napoli.

- (17) Atti specifici possono essere riscontrati ovviamente, presso gli Uffici di Ragioneria dell'Ateneo o la Presidenza della Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
- (18) Va, peraltro, rilevato che diversamente è stata ed è la situazione delle immatricolazioni della Facoltà di Ingegneria (in proposito vedere l'Appendice n.3); d'altronde è da ricordare che ormai da oltre un trentennio l'attività didattica del biennio propedeutico di detta Facoltà è svolta completamente dai docenti ad essa afferenti.
- (19) Per sede Napoli si intende la Facoltà di Scienze MM.FF.NN.; si avverte anche che la disciplina indicata può essere stata mutata rispetto a quella primitiva, ciò vale poi tanto più in relazione a quanto fatto presente nel punto 4.3 circa il fatto che la titolarità del docente ormai appartiene ad un'area disciplinare alla quale appartengono varie discipline. Si avverte, inoltre, che i casi di pluralità di sedi per uno stesso soggetto vanno, ovviamente, indicati quali sequenziali trasferimenti dalla prima all'ultima sede.
- (20) Messasi in quiescenza prematuramente.
- (21) In essa va ovviamente compresa quella dipartimentale (vedere articoli 81-93 del D.P.R. 11.7.80, n.382).
- (22) Il cui iter procedurale iniziò finalmente nel 1991/1992 e si è concluso nell'a.a. 1994/95 e il nuovo Statuto è entrato in vigore a partire dall'a.a. 1995/96.
- (23) Vedere le Leggi d'Italia-Testo vigente di V. De Martino, Edizioni Giuridiche Istituto de Agostini.
- (24) Vedere introduzione di Gianni Puglisi nel Volumetto n. 4 "Riordinamento della docenza universitaria, fascia di formazione, sperimentazione organizzativa e didattica" - Università Progetto-Società Cooperativa Editrice S.r.l.
- (25) Prefazione di Claudio Pedrini al Volumetto n.4 già citato alla Nota (24).



## Use of 2,2,2-Trifluoroethanol for Intramolecular Hydrogen Bonding Stabilization in Carbohydrates

Nota di Cristina De Castro, Rosa Lanzetta, Lorenzo Mangoni,  
Emiliano Manzo, Antonio Molinaro and Michelangelo Parrilli\*<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Lorenzo Mangoni  
(Adunanza del 4 marzo 2000)

*Key words: carbohydrate, caryophyllose, hydrogen bond, 2,2,2-trifluoroethanol*

**Abstract** -The use of 2,2,2-trifluoroethanol (TFE) to favour intramolecular hydrogen bonds for carbohydrates is suggested. This belief arises from the investigation, by <sup>1</sup>H-NMR spectroscopy, on the shift of the isomeric equilibrium of caryophyllose, a monosaccharide at twelve carbons, on changing the solvent from water to TFE.

**Riassunto** - In questo lavoro è suggerito l'uso del 2,2,2-trifluoroetanolo (TFE) come solvente per favorire la formazione di legami idrogeno intramolecolari nei carboidrati. Questa informazione scaturisce dalla spettroscopia <sup>1</sup>H-NMR con la quale si è potuto accertare lo spostamento dell'equilibrio isomerico del cariofillosio, un monosaccaride a dodici atomi di carbonio, nel cambio di solvente da acqua a TFE.

### 1 - INTRODUCTION

Intramolecular hydrogen-bonding often plays an important role in the determination of conformational properties of biological molecules. In particular for underivatated carbohydrates, intramolecular hydrogen-bonding has been so far investigated in DMSO or in H<sub>2</sub>O, obtaining in some cases controversial results [1,2].

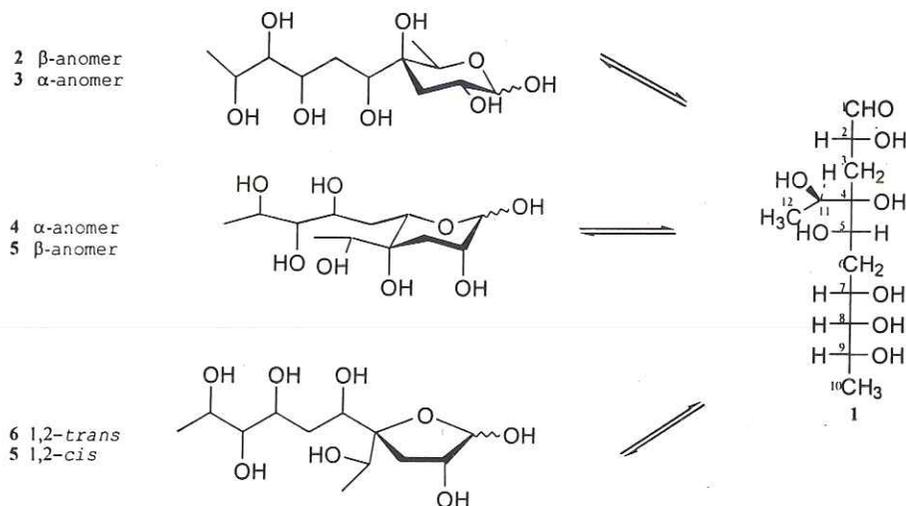
We now describe for the first time the behaviour of the isomeric equilibrium mixture of a monosaccharide in 2,2,2-Trifluoroethanol (TFE). This study shows the superior capacity of this solvent with respect to water to favour intramolecular hydrogen-bonding stabilization.

---

<sup>1</sup>Università di Napoli "Federico II" Dipartimento di Chimica Organica e Biologica, Via Mezzocannone, 16 Napoli 80134 Italy \* corresponding author

## 2 - RESULTS AND DISCUSSION

The investigated monosaccharide was caryophyllose (3,6,10-trideoxy-4-C-[D-glycero-1-hydroxyethyl]-D-erythro-D-gulo-decose) **1**, which is the first twelve-carbons monosaccharide recently isolated from the LPS fraction of *Pseudomonas caryophylli* [3]. Its peculiar structure allows it to give a complex isomeric equilibrium mixture consisting of two couples of anomeric pyranose forms **2**, **3** and **4**, **5** in addition to two anomeric furanose forms **6**, **7** (Scheme).



Scheme

Molecular modelling for the pyranose forms, using Chem 3D gave the energy minimized conformations depicted in Figure 1. Those of **4** and **5** suggested the possibility of strong intramolecular hydrogen bonds (IHBs) due to the *syn*-diaxial orientation of hydroxyls at C4 and C2 [4] and to the hydrogen bonding co-operative effect [5] of hydroxyls at C11, C7 and C9. This suggestion was in agreement with the electrostatic energy terms for **4** and **5** which were calculated to be more negative than those for **3** and **2**, thereby the stabilization *in vacuo* of former anomers with respect to the latter ones might be mainly due to the IHBs. Work is in progress for an accurate estimate of the steric energy of **2-5** tautomers.

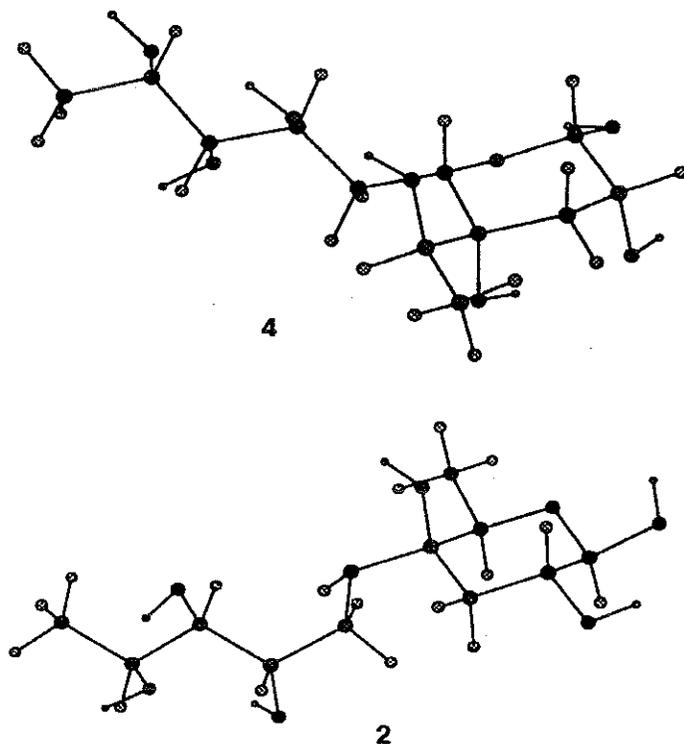


Figure 1: Minimized conformations for  $\beta$ -anomers 4 and 2. Those for  $\alpha$ -anomers 5 and 3 (not shown) are similar

In a previous paper [3] it was found that isomers 2 and 3 were the most abundant ones in the aqueous solution of caryophyllose. An accurate analysis of the  $^1\text{H}$  and  $^{13}\text{C}$ -NMR spectra [6] allowed us now to identify the presence of all of six isomers 2-7 in water and to establish, by integration of the proton anomeric signals (Figure 2A), the following percentages: 2: 3: 4: 5: 6: 7 = 66.2: 20.5: 5.8: 5.2: 1.2: 1.1 at 30 °C.

In order to try to shift the isomeric equilibrium towards the couple of 4 and 5 we chose 2,2,2-trifluoroethanol (TFE) because mixtures of TFE/water act as structuring solvents for linear peptides due to their ability to preserve *inter alia* IHBs [6]. The NMR analysis also in this case indicated the presence of all of six isomers 2-7. The integration of the proton anomeric signals (Figure 2B) gave the following percentages: 2: 3: 4: 5: 6: 7 = 14.2: 5.4: 31.8: 40.4: 4.7: 3.5 at 30 °C which clearly showed the actual shift in TFE- $d_3$  of the caryophyllose equilibrium towards isomers 4 and 5.

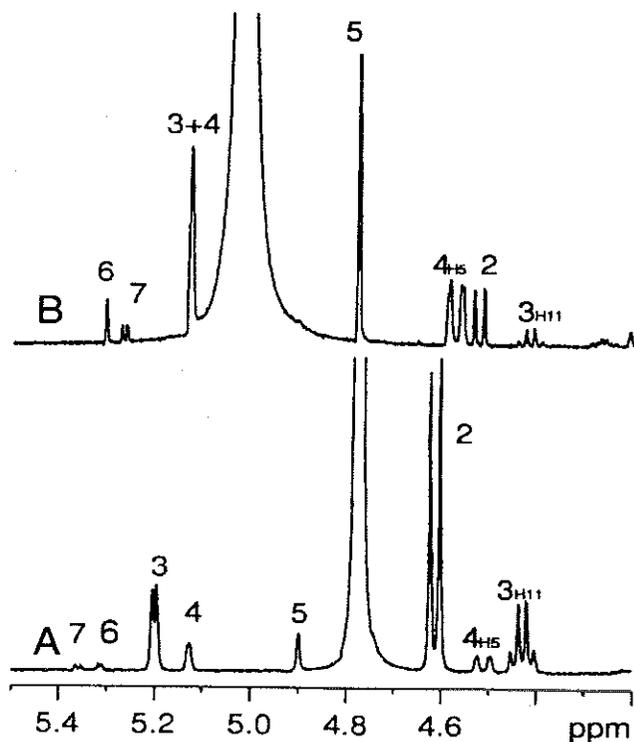


Figure 2: Anomeric regions of 400 MHz  $^1\text{H}$ -NMR spectra of caryophyllose isomeric mixture at 30 °C in  $\text{D}_2\text{O}$  (A) and in  $\text{TFE-}d_3$  (B), measured on a Bruker DRX400 Avance spectrometer. In addition to the anomeric signals of each isomer are also showed the protons H5 and H11 of 4 and 3, respectively.

To the aim to support the involvement of IHBs in the stabilization of 4 and 5 we performed some  $^1\text{H}$  NMR spectra in  $\text{CF}_3\text{CD}_2\text{OH}$  ( $\text{TFEOH-}d_2$ ) at temperatures lower than 30 °C in order to obtain hydroxyl signals as sharp patterns. In the best condition, at 15 °C we obtained a proton spectrum where two sharp singlets occurred at  $\delta$  4.69 and  $\delta$  4.62 besides a very broad signal centred at  $\delta$  4.45. All of these signals were attributed to hydroxyl protons since they were missing in the proton spectrum measured in  $\text{TFE-}d_3$  and they were the exchange-correlated signals occurring in a 1D-NOESY spectrum obtained by selective excitation of the solvent OH signal. The singlets at  $\delta$  4.69 and 4.62 were assigned to the C4' hydroxyl protons of 4 and 5, respectively, on the basis of their long-range correlation with the C4, C3 and C11 carbon signals for both the isomers (Figure 3).

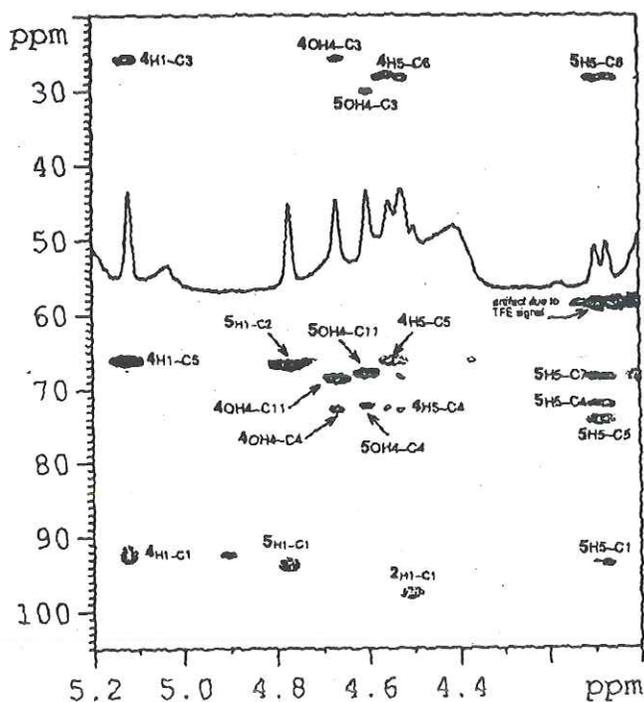


Figure 3: Low-field region of  $^1\text{H-NMR}$ , HMBC (bold), HSQC (dotted) spectra of caryophyllose isomeric mixture in  $\text{TFEOD}_2$  at  $15\text{ }^\circ\text{C}$ , measured with standard Bruker software. Asterisk indicates an artificial cross-peak. A delay of 60 ms was used for HMBC spectrum.

The appearance of these protons as sharp signals indicated a reduced exchange rate with solvent suggesting their involvement in hydrogen bonds. Small temperature coefficients of hydroxyl proton signals are usually exploited to ascertain their involvement in hydrogen bonds. For the singlets at  $\delta$  4.69 and 4.62 values of  $11.4\text{ ppb deg}^{-1}$  and  $10.6\text{ ppb deg}^{-1}$ , respectively, were measured. Since all of other hydroxyl signals occurred gathered together we were unable to perform comparative measurements of temperature coefficients. However the above values, even though they are larger than the value of about  $3\text{ ppb deg}^{-1}$  which was reported in DMSO solution for hydroxyl protons involved in strong hydrogen bonds [7], are close to  $9.1\text{ ppb deg}^{-1}$ , a value found for a hydrogen-bonding hydroxyl proton in  $\text{H}_2\text{O}/\text{CD}_3\text{COCD}_3$  solution.[7]. The above results suggested the involvement of C4 hydroxyls in hydrogen bonds very probably in intramolecular way with the C2 hydroxyls as it occurs often for analogous molecules with *syn*-diaxial orientated

hydroxyls[8]. From this outcome it might be concluded that TFE appears to be a solvent that stabilizes IHBs in carbohydrate more than H<sub>2</sub>O [9]. However there are oligosaccharide cases where IHBs in water were described as well [1,7].

Taking into account the higher acidity and the lower oxygen nucleophilicity of TFE with respect to H<sub>2</sub>O, this latter arises to be a better hydrogen-bonding acceptor and a worse hydrogen-bonding donor than TFE [10]. For cleavage of IHBs hydrogen acceptor character appears to be more significant than donor capacity. This could be explained by the presence of two hydrogen acceptor sites on the oxygen [11] which would be able to accept an hydrogen bond even though it is already involved in IHBs. The above hypothesis was suggested to explain the structuring effect on peptides and proteins induced by TFE/H<sub>2</sub>O mixtures: in this solvent the amide carbonyl groups would form bifurcated hydrogen bonds preserving IHBs.

The behaviour of the caryophyllose isomeric equilibrium in mixture of TFE/water has been also investigated at 65 °C. The modification of the caryophyllose isomeric distribution by increasing the water content up to 70% (v/v) (Table) indicates that the shift of the equilibrium towards **2** and **3** doesn't occur in a regular way but there is a large variation up to about 30% of water content, then further water additions, up to 70%, do not change the isomeric distribution.

Table: Caryophyllose isomeric distributions for different percentages (v/v) of TFE-*d*<sub>3</sub>/D<sub>2</sub>O, measured by anomeric signal integration of <sup>1</sup>H-NMR spectra at 65 °C

TFE- <i>d</i> <sub>3</sub>	D <sub>2</sub> O	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6+7</b>
100	0	15.3	5.2	26.4	38.4	14.7
85	15	25.3	8.0	25.0	30.8	10.9
80	20	26.6	8.7	25.3	28.9	10.5
75	25	31.9	11.2	20.8	25.1	11.0
65	35	37.8	13.4	17.9	20.5	10.4
60	40	38.5	13.5	18.0	20.0	10.0
50	50	39.5	13.5	17.9	19.2	9.9
40	60	39.6	13.3	18.2	18.9	10.0
30	70	39.6	13.3	17.8	19.0	10.3
0	100	60.6	17.4	7.5	9.1	5.4

The comparison of these isomeric distributions with that measured at the same temperature in pure D<sub>2</sub>O suggests that low amounts, up to 30%, of TFE in D<sub>2</sub>O determine large variation in the isomeric distribution as well. This behaviour seems to be similar to that found for peptides for which percentages (v/v) of TFE in water higher than 30% do not determine an increase in the structuring ability of the solvent mixture [12]. As matter of fact, additional factors have been taken into account to explain the structuring effect of the TFE/water mixture on peptides. They can play a role in the determining the caryophyllose isomeric distribution as well. For example,

the higher polarity of water should favour the cleavage of IHBs, and the higher hydrophobicity of TFE would make more difficult for the water molecules to approach TFE-solvated IHBs and to determine their severing. This effect could be enhanced by the steric hindrance of TFE molecule which is about nine times the size of the water molecule.

A final remark on the caryophyllose isomeric distribution points out the increase in the proportion of 6 and 7 on changing the solvent from water to TFE that is in keeping with the *cis*-orientation of hydroxyl rings which would favour the IHB formation.

### 3 - CONCLUSIONS

It is noteworthy that the caryophyllose isomer equilibrium might be a convenient tool to investigate the IHB stabilization capability of solvents allowing the direct comparison of pyranose forms, each in only one conformation, having different hydrogen bond requests.

Work is in progress to confirm the aptitude of TFE to stabilize IHBs on more common carbohydrates.

### 4 - REFERENCES

- [1] Poppe L.; Van Halbeek H. (1991) *Nuclear magnetic resonance of hydroxyl and amido protons of oligosaccharides in aqueous solution: evidence for a strong intramolecular hydrogen bond in sialic acid residue*. J. Am. Chem. Soc., **113**, 363-365.
- [2] Adams B.; Lerner L. (1992) *Observation of hydroxyl protons of sucrose in aqueous solution: no evidence for persistent intramolecular hydrogen bonds*. J. Am. Chem. Soc., **114**, 4827-4829
- [3] Adinolfi M.; Corsaro M.M.; De Castro C.; Evidente A.; Lanzetta R.; Lavermicocca P.; Parrilli M. Carbohydr. Res. (1996) *Analysis of the polysaccharide components of the lipopolysaccharide fraction of Pseudomonas caryophylli*, **284**, 119-133.
- [4] Jeffrey G.A. (1973) *Intramolecular hydrogen bonding in carbohydrate crystal structure*. Carbohydr. Res. **28**, 233-241
- [5] Jeffrey G. A.; Lewis L. (1978) *Cooperative aspects of hydrogen bonding in carbohydrates*. Carbohydr. Res. **60**, 179-182.
- [6] Pitner T. P.; Urry D. W. (1973) *Proton magnetic resonance studies in trifluoroethanol. Solvent mixtures as a means of delineating peptide protons*. J. Am. Chem. Soc., **94**, 1399-1400;

- [7] Sandström C.; Baumann H.; Kenne L. (1998) *NMR spectroscopy of hydroxy proton of 3,4-disubstituted methyl  $\alpha$ -D-galactopyranoside in aqueous solution*. J. Chem. Soc. Perkin Trans. 2, 809-815.
- [8] Angyal S. J.; Christofides J. C. (1996) *Intramolecular hydrogen bonds in monosaccharides in dimethylsulfoxide solution*. J. Chem. Soc. Perkin Trans.2, 1485-1491.
- [9] Llinas M.; Klein M. P. (1975) *Charge relay at peptide bond. A proton magnetic resonance study of solvation effect on the amide electron density distribution*. J. Am. Chem. Soc., **97**, 4731-4737.
- [10] Baker E. N.; Hubbard R. E. (1984) *Hydrogen bonding in globular proteins*. Progr. Biophys. Mol. Biol., **44**, 97-179.
- [11] Van Buuren A.R.; Berendsen H. J. C. (1993) *Molecular dynamics simulation of the stability of a 22-residue  $\alpha$ -helix in water and 30% trifluoroethanol*. Biopolymers, **33**, 1159-1166.
- [12] Abraham R.J.; Chambers, E. J., Thomas, W.A..(1993) *Conformational analysis. Part 21. Conformational isomerism in cis-cyclohexane-4-1,3-diol*. J. Chem. Soc. Perkin Trans.2, 1061-1066.

## **Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota I: Malte e calcestruzzi con addizione di fumo di silice condensato.**

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 6 Maggio 2000).

**Riassunto** Dopo un accenno all'interesse odierno della produzione di cementi compositi ed alle caratteristiche di comportamento tecnico che impartiscono alle strutture, viene passato in rassegna lo stato attuale delle conoscenze sull'impiego del fumo di silice condensato quale prodotto di rimpiazzo di un'aliquota di cemento Portland. Si evidenziano: modalità di miscela opportunità, vantaggi e limiti del rimpiazzo.

*Parole chiave:* Cementi compositi; aggiunte minerali; fumo di silice.

**Summary** The current interest of blended cement manufacture, together with the technical characteristics they grant to the works, are emphasized. Particular attention is paid to the actual knowledge on the utilisation of condensed silica fume as partial replacement of Portland cement, elucidating at the same time the ways of blending and the opportunity, the benefits and the limits of such a replacement.

*Key words:* Blended cements; mineral addition; condensed silica fume

I moderni sviluppi della tecnologia di fabbricazione dei leganti idonei alla costruzione delle grandi opere civili si ripromettono una riduzione del fabbisogno energetico, una migliorata durabilità delle strutture, grazie ad una potenziata resistenza ad attacchi chimici di varia natura, una più spinta tutela dell'ambiente (1). L'industria cementiera, che produce il maggior volume di materiale manifatturato del mondo, fornisce uno dei più alti contributi all'aumento di anidride carbonica nell'atmosfera, a seguito della decomposizione della calcite e dell'uso di combustibili fossili di alimentazione dei forni rotativi.

Uno dei possibili percorsi per avvicinarsi a tale impegnativo traguardo, è rappresentato dalla sostituzione pianificata di un'aliquota di cemento Portland con prodotti minerali supplementari, reperibili tanto in natura (2), quanto come sottoprodotti di lavorazioni industriali, ottenendo in tal modo i cementi compositi (3).

Alla prima categoria di prodotti di rimpiazzo appartengono le pozzolane naturali (4), alla seconda, le ceneri volanti a basso contenuto di calcio (Fly Ashes, classe F, secondo ASTM C618,  $\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3 > 70\%$ ) (5), le scorie d'alto forno, basiche, granulate (6), prodotti tutti compiutamente studiati e largamente utilizzati per la preparazione di cementi compositi di ottima fattura.

Risulta infatti che la loro presenza, in sostituzione parziale del cemento Portland, oltre al beneficio ecologico ed al minor costo per unità di volume, induce essenziali caratteristiche, quali: protezione dall'attacco dei solfati, da quello delle acque acide e dalla reazione espansiva alcali silice (7), impermeabilità del manufatto, rallentamento e riduzione del calore d'idratazione e dell'espansione termica. I silicati di calcio idrati, che si neoformano nel corso della reazione "pozzolanica", sviluppano infatti minor calore rispetto a quello della idratazione diretta del silicato tricalcico. La potenziata resistenza ad azioni chimiche, alcali silice compresa, va invece collegata alla riduzione della permeabilità della struttura, dovuta alla presenza di pori più fini, nonché alla ridotta alcalinità, per la minor presenza di idrossido di calcio, sottratto al sistema per reazione "pozzolanica".

Ceneri volanti e scorie d'altoforno sono prodotte in quantità considerevoli ed è noto che i cementi alla cui preparazione hanno concorso, manifestano proprietà meccaniche simili a quelle del cemento Portland (8), rivelandosi pienamente idonei alla realizzazione di infrastrutture ed ogni altra impegnativa costruzione. Lo stesso vale per le pozzolane naturali, il cui impiego per la produzione dei cementi pozzolanici è tuttora largamente diffuso in quei Paesi (Italia, Cile, Grecia, ecc.) che dispongono di tale risorsa piroclastica.

La necessità di collocazione di prodotti di risulta, unitamente al proposito di ridurre il fabbisogno di energia e conseguire, ad un tempo, i vantaggi già ricordati, spinge oggi ad ampliare il numero dei prodotti supplementari per cementi compositi. In quei Paesi che possono disporne, si sono pertanto fatti avanti nuovi prodotti di rimpiazzo, quali, ad esempio, il fumo di silice condensato, o le ceneri di pula di riso, entrambi dotati di alta attività "pozzolanica". Il Comitato Tecnico della RILEM 73 SBC (sottoprodotti silicei nel calcestruzzo), ha infatti classificato tanto il primo, quanto le seconde prodotte a bassa temperatura, come materiali altamente "pozzolanici". La loro reattività con la calce è dovuta al fatto che entrambi sono costituiti essenzialmente da silice amorfa (Fig. 1) ed esibiscono alta superficie specifica.

A tali nuovi prodotti supplementari se n'è aggiunto uno che non manifesta nè attività "pozzolanica", nè proprietà idrauliche latenti (come la scoria d'alto forno granulata): il calcare finemente macinato, entrato anch'esso di recente nell'ampia famiglia di prodotti supplementari per cementi compositi.

Questa Nota si propone pertanto di presentare i recenti sviluppi dell'utilizzazione del fumo di silice condensato nel settore cementiero, sottolineando gli effetti di maggior rilievo che la sua presenza comporta quale prodotto di rimpiazzo di un'aliquota di cemento Portland.

\* \* \*

Il fumo di silice condensato, detto anche: microsilice, polvere di silice, aerosol, silice volatilizzata, farina di silice, silice pirogenica, è il prodotto che si raccoglie nei filtri di depolverizzazione dei gas, negli impianti di produzione di silicio metallico e di leghe ferro silicio. L'ossido di silicio gassoso,  $\text{SiO}_2$ , prodotto a seguito della riduzione del quarzo, si ossida al contatto con l'aria e rapidamente condensa sotto forma di particelle finissime di silice amorfa, di forma sferica, in gran parte con diametro inferiore a 0.1 micron. La superficie specifica è dell'ordine di  $20.000 \text{ m}^2/\text{kg}$ , pertanto prossima ad un centesimo di quella della scoria d'alto forno o delle ceneri volanti. E' il prodotto dotato di più alta attività "pozzolanica" fra tutte le aggiunte minerali e, nonostante sia generato in quantità relativamente modeste nei maggiori Paesi produttori (Norvegia, Stati Uniti, Australia, Francia, Sud Africa, Giappone, Germania, Canada e Svezia), riscuote crescente interesse per le caratteristiche che impartisce agli impasti cementizi: aumento della resistenza a compressione, di quella all'abrasione, della forza di legame con i ferri delle armature del calcestruzzo, riduzione del ritiro all'essiccazione e della permeabilità.

Nella produzione di silicio metallico si origina un particolato normalmente costituito dal 94 al 98% di silice. Tale titolo scende intorno al 86-90% nella produzione di leghe.

La composizione chimica dipende in massima parte dalla materia prima caricata nel forno e, in via subordinata, dalle caratteristiche funzionali di quest'ultimo. Le impurezze cristalline più comuni sono sostanzialmente costituite da quarzo (Fig.1), ferro metallico, siliciuro di ferro, cloruro di potassio (9). Una pellicola di carbonio, se presente sulla polvere, ne abbassa notevolmente la reattività.

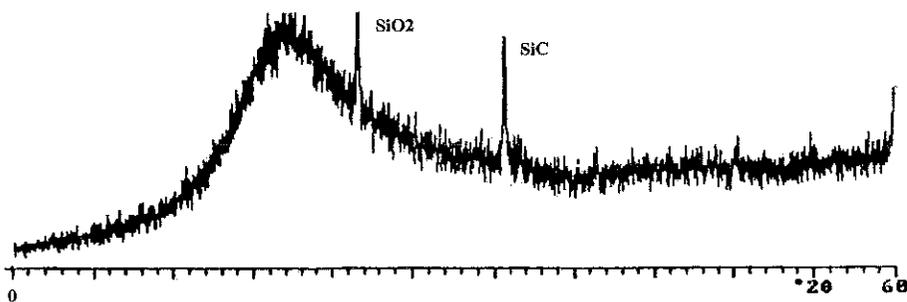


Figura 1.

Per effetto delle dimensioni assai fini delle particelle, il peso specifico apparente si aggira intorno a 200-250 kg/m<sup>3</sup> (10), ciò che crea non poche difficoltà nel trasporto e nella manipolazione. Successive operazioni di densificazione ed agglomerazione consentono di raggiungere un peso specifico apparente circa doppio, il che facilita, in modo relativo, insaccaggio e trasporto, anche se la diminuzione di superficie specifica influenza la reattività. E' stato infatti constatato che il procedimento di densificazione abbassa significativamente l'attività "pozzolanica" (11). Si rinviene in commercio anche sotto forma di sospensione.

A differenza di altri prodotti supplementari, quali: pozzolane e ceneri volanti, caratteristica distintiva del fumo di silice di una medesima provenienza, è la costanza di composizione nel tempo, a seguito della purezza della materia prima impiegata.

Poichè solo in tempi recenti il fumo di silice si è reso disponibile in misura tale da renderne possibile l'impiego nell'industria cementiera, la ricerca è particolarmente attiva nel settore.

Struttura amorfa e finezza delle particelle sono i principali moventi dell'eccellente attività "pozzolanica", anche se composizione chimica e natura delle impurezze possono condizionarla.

Le aggiunte minerali possono esser incorporate nel calcestruzzo - la forma quasi totale di utilizzazione del cemento - in due differenti maniere. La prima è rappresentata dalla semplice miscelazione con il clinker macinato, oppure dalla simultanea macinazione con esso, la seconda, dall'aggiunta dosata dell'aggiunta minerale direttamente negli impianti di produzione del calcestruzzo.

L'interesse iniziale dell'impiego del fumo di silice si è rivolto alla parziale sostituzione del Portland nella produzione di cementi compositi. Laddove il prodotto è più abbondantemente reperibile a costi relativamente contenuti, tale modalità di utilizzazione perdura. L'impiego più consolidato è però oggi l'aggiunta diretta al calcestruzzo, nei casi in cui si richiedano alta resistenza a compressione (>80 MPa) (12) ed alta durabilità. Diversamente dalle tipiche pozzolane o dalle ceneri volanti, la reazione con la calce è infatti più rapida, sicché per raggiungere alta resistenza meccanica ed impermeabilità della struttura, non è richiesto un lungo periodo di stagionatura, benché le modalità di quest'ultima ne condizionino il comportamento in servizio.

Calcestruzzi stagionati a vapore hanno infatti denunciato valori di resistenza a compressione più alti e riduzione della permeabilità rispetto a quelli stagionati ad umido od all'aria (13).

Lo studio della microstruttura e della struttura dei pori in paste di cemento stagionate, contenenti fumo di silice come prodotto di parziale rimpiazzo di cemento Portland, ha inoltre posto in luce una riduzione della porosità capillare e la presenza di un maggior quantitativo di pori a forma di guscio (14). La riduzione di porosità capillare promossa da tali gusci, inclusi nel gelo di cemento ed in comunicazione con l'esterno attraverso i pori capillari, validamente giustificherebbe la particolare efficienza del fumo di silice ai fini del decremento della permeabilità.

Con lo scopo di prevedere il comportamento del calcestruzzo contenente fumo di silice, composizione chimica e volumetrica finale comprese, è stato anche sviluppato un modello quantitativo (15).

Com'è noto, un'aggiunta minerale con particelle assai fini, fa crescere la richiesta d'acqua per raggiungere una determinata consistenza (16), benchè esudazione e segregazione tendano a diminuire e gli impasti esibiscano maggiore coesione. Proprio per l'elevata finezza delle particelle, il fumo di silice richiede un'abbondante addizione di acqua, il che automaticamente abbassa l'aliquota di cemento Portland che può esser rimpiazzato. Si corregge l'inconveniente mediante impiego di additivi superfluidificanti (17), per contrastare il calo di resistenza meccanica determinato dall'innalzamento del rapporto acqua/cemento. Ricorrendo a tali additivi, con addizione del 10-20 % di fumo di silice rispetto al peso di cemento, si raggiungono alta resistenza meccanica e durabilità.

L'aggiunta di superfluidificanti facilita inoltre la dispersione del cemento e delle particelle di fumo, accelerando le reazioni d'idratazione e favorendo la nascita di un sistema più omogeneo.

E' stato posto in luce che un trattamento superficiale del fumo di silice con silano, avanti l'impiego, aumenta la lavorabilità della malta, anche senza impiego di agenti superfluidificanti (18). Tale pre-trattamento incrementa la bagnabilità della polvere e, conseguentemente, la lavorabilità della miscela, così come il legame fumo di silice-cemento. La resistenza a tensione cresce di circa il 27% e quella a compressione di circa il 31%, rispetto ad una malta campione, confezionata con fumo di silice non pre-trattato.

In linea di massima, se l'addizione di fumo di silice è contenuta intorno al 10%, non si registrano, in generale, effetti significativi imputabili alla maggior richiesta d'acqua per l'impasto. Il 10% in massa di fumo di silice è stato anche individuato come optimum per migliorare la lavorabilità del calcestruzzo (19).

Elevati livelli di durabilità possono anche esser raggiunti ricorrendo a miscele ternarie Portland-scoria d'altoforno-fumo di silice. La durabilità, però, si abbassa quando il processo di stagionatura ad umido si sostituisce con quello a secco. Con addizione di fumo di silice il tempo di presa generalmente incrementa.

E' noto che le aggiunte minerali abbassano il valore del pH della soluzione nei pori della pasta di cemento, condizione non favorevole per la resistenza alla corrosione dei ferri annegati nel calcestruzzo. Al fine di assicurar loro un alto grado di passività e combattere, ad un tempo, l'azione dei sali aggressivi che migrano dall'ambiente circostante, la sostituzione del 10% di cemento Portland con fumo condensato viene ritenuta un dosaggio ottimale. Infatti, la riduzione di pH del calcestruzzo resta ancora insufficiente per influenzare la velocità di corrosione.

Al pari di altre aggiunte "pozzolaniche", se anche in misura maggiore, il fumo di silice abbatte l'espansione promossa da alcuni costituenti (silice amorfa, silicati cristallini, che talvolta accompagnano gli aggregati per calcestruzzo),

con la soluzione alcalina presente nei pori della pasta di cemento. Si può ritenere, in prima approssimazione, che la reazione alcali-aggregato non risulti temibile nei casi in cui il tenore di  $\text{Na}_2\text{O}$  equivalente ( $\text{Na}_2\text{O} + 0,658 \text{K}_2\text{O}$ ) nel cemento non superi lo 0.6% in massa.

Al pari di altre aggiunte "pozzolaniche", il fumo di silice abbatte considerevolmente la velocità di diffusione dei cloruri nella pasta di cemento Portland ordinario, un vantaggio di particolare rilevanza per la resistenza all'azione delle acque marine ed alla corrosione delle armature.

Il fumo di silice (15% rispetto al peso di cemento) abbassa inoltre la conduttività termica delle paste di cemento fino al 46%, grazie alla bassa conduttività ed alla bassa densità impartita alle stesse (20).

Il ritiro all'essiccazione risulta poi particolarmente significativo alle brevi stagionature (21), poiché il fumo condensato, in virtù dell'alta "pozzolanicità", incrementa il contenuto di silicato di calcio idrato, il maggior responsabile del ritiro a 28 giorni. Poiché la reazione "pozzolanica" si completa alle brevi stagionature, il ritiro all'essiccazione a lungo termine non sembra significativamente influenzato dall'aggiunta di fumo condensato, specie se si osservano appropriate condizioni di stagionatura.

Con riferimento allo scorrimento viscoso, calcestruzzi con aggiunte "pozzolaniche" stagionati a dovere, esibiscono valori più bassi di quelli privi di aggiunte. Poiché lo scorrimento viscoso del calcestruzzo è inversamente proporzionale alla resistenza meccanica, la presenza di fumo di silice rende ragione del più basso ritiro, in virtù dell'alta "pozzolanicità".

Il fumo di silice trova anche impiego nella produzione di sistemi densificanti contenenti particelle ultrafini omogeneamente disperse (i cosiddetti materiali DSP), (22).

Si richiedono: un basso rapporto acqua-cemento (0.12-0.22), aggregati e procedimenti speciali. Con cemento Portland e superfluidificanti si possono preparare calcestruzzi con resistenza a compressione anche prossima a 270 MPa, buona resistenza all'abrasione ed all'attacco chimico. Le particelle di fumo di silice, più fini di quelle del cemento, riempiono parzialmente gli spazi vuoti fra i granelli e, unitamente all'azione dei superfluidificanti, probabilmente consentono un costipamento più uniforme.

Il fumo di silice introdotto nei calcestruzzi ad alta resistenza agirebbe inoltre sia come "pozzolana" reattiva, sia come filler (23), contribuendo in tal modo all'innalzamento della resistenza a compressione.

E' stato anche sviluppato un procedimento di produzione di compositi cementizi a basse densità e costo, dotati di proprietà meccaniche superiori, idonei a sostituire i calcestruzzi leggeri, prodotti in autoclave (24). Una matrice realizzata con ceneri volanti, fumo di silice, cemento Portland e silicati di calcio, è stata rinforzata con fibre di carbonio e con fibre di vetro resistenti agli alcali.

La composizione chimica e di fase dei prodotti d'idratazione che si neoformano a seguito della reazione "pozzolanica", risulta qualitativamente simile a

quella dei prodotti dai cementi compositi preparati con le tipiche aggiunte minerali (25), anche se la velocità di reazione è sensibilmente maggiore. Il prodotto dominante dell'idratazione resta il silicato di calcio idrato, benchè vi sia differenza nella qualità, quantità e microstruttura dei prodotti finali, il che rende ragione delle migliorate caratteristiche acquisite.

E' stato rilevato che l'attivazione meccanica in molino vibratore di miscele cemento/fumo di silice, accelera la reazione d'idratazione del 15-20%, specialmente durante il periodo d'indurimento iniziale, reazione che diviene ancor più pronunziata per valori del rapporto acqua/cemento dell'ordine di 0.4 (26). Viene avanzata l'ipotesi di una più fine ridistribuzione/omogeneizzazione delle particelle di fumo condensato, con neoformazione di sottili strati di  $\text{SiO}_2$  intorno ai cristalli di silicato tricalcico, con accelerazione della reazione "pozzolanica" e promozione della crescita di un tessuto più esteso di prodotti d'idratazione.

L'indagine roentgenografica (27) conferma che il rapporto calce/silice nel silicato di calcio idrato di neoformazione si abbassa all'aumentare di fumo condensato nel cemento. Il fumo accelera l'idratazione sia del silicato tricalcico, che dell'alluminato tricalcico, con conseguente aumento del calore d'idratazione alle prime ore. L'idratazione del silicato tricalcico viene accelerata secondo un meccanismo di adsorbimento di ioni calcio da parte della silice e successiva rapida diffusione nel silicato di calcio idrato a basso rapporto calce/silice.

### *Conclusioni.*

L'aggiunzione di fumo di silice condensato agli impasti cementizi offre sostanziali vantaggi, benchè l'opportunità di un ricorso ad un prodotto supplementare a comportamento "pozzolanico" ben più costoso di altri, vada valutato caso per caso.

Trasporto ed utilizzazione del fumo condensato richiedono attenzione supplementare, così come le modalità di stagionatura dei calcestruzzi alla cui preparazione tale aggiunta ha concorso.

Il fumo di silice non dovrebbe pertanto esser utilizzato in quei casi in cui tipiche aggiunte "pozzolaniche" possono espletare un analogo servizio. E' stato infatti segnalato (28) che la combinazione del 10% di scoria d'alto forno con il 10% di cenere volante, finemente macinati, incrementa la resistenza a compressione del calcestruzzo a tutte le stagionature, come il fumo di silice. E' stato anche posto in luce che un tenore ottimale del 10% di ceneri volanti di classe F, portate a finezza spinta (99% passante al setaccio con luci da 45 micron), quale rimpiazzo di cemento Portland, consente un miglioramento della resistenza meccanica e del comportamento generale (29).

Sembra anche possibile sostituire parzialmente o totalmente il fumo di silice nei calcestruzzi ad alta resistenza con cenere volante ultrafine (30).

In considerazione dell'arco di tempo relativamente breve di utilizzo del fumo di silice condensato nel settore cementiero, appare pertanto raccoman-

dabile approfondirne il comportamento a lungo termine in seno al calcestruzzo, per far ulteriore luce su alcuni aspetti essenziali del suo impiego.

Benchè sia ormai certo che l'aggiunta di fumo di silice riduca significativamente l'espansione dovuta ad alcali reazione, pur tuttavia si avverte tuttora la necessità di chiarire il complesso dei parametri che determinano la sua efficacia. Ciò perché, a parte il costo, l'opportunità, particolarmente nei climi freddi, di raggiungere valori di resistenza meccanica assai elevate a brevi stagionature, e - ad un tempo - far sopportare considerevoli carichi alle strutture, unitamente alle caratteristiche di durabilità, di resistenza all'abrasione e ad azioni chimiche, costituisce un beneficio tecnico di alta rilevanza.

## BIBLIOGRAFIA.

- (1) Sersale R. Cementi compositi. L'Edilizia, XII, 11-12, 28 (1998).
- (2) Sersale R. Aspects of the chemistry of additions. In: Advances in cement technology. S.N.Ghosh ed., Pergamon Press, Oxford, 537 (1983).
- (3) Norme UNI ENV 197-1.  
Sersale R. Blended cements. In: Cement and concrete science and technology. Part I. S.N. Ghosh ed., ABI Books, New Dehli, 314 (1991).
- (4) Sersale R. Structure et caractérisation des pouzzolanes et des cendres volantes. 7è Congrès Int. Chimie ciments. I Rapports Principaux, IV -1/3 -1/21. Paris (1980)..
- (5) Sersale R., Valenti G.L. Proprietà chimiche e fisiche di ceneri volanti ed influenza sul comportamento meccanico delle relative malte cementizie. Cemento, 83, 4, 565 (1986).  
Sersale R., Valenti G. L., Cioffi R. Production and utilisation of fly ash in Italy. CAN MET /ACI Conf. V.M. Malhotra ed. I, Amer. Concr. Inst., 741 (1986).
- (6) Sersale R., Giordano Orsini P. Idratazione e trasformazione della scoria d'alto forno per contatto con soluzione d'idrossido di calcio. Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, III, 3, 9, (1960).
- (7) Sersale R. Influenza delle aggiunte attive sull'alcali reazione e sulla resistenza a compressione del risultante cemen to. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, IV, 56, 61, (1989).  
Ramachandran V. S. Alkali-aggregate expansion inhibiting admixtures. Cem. Concr. Composites, 20, 149, (1998).
- (8) Sersale R. Advances in Portland and blended cements. Proc. 9th Int. Conf. Chem. Cement. I. Nat. Council. Cement and building materials . New Dehli, 261 (1992).
- (9) Taylor H.V.F. Cement chemistry. Academic Press. Ltd., London, 305 (1990).
- (10) Swamy R.N. Cement replacement materials. III, Surrey Univ. Press, 142 (1986).
- (11) Sanchez de Rojas M.I., Rivera I, Frias M. Influence of the microsilica state on pozzolanic reaction rate. Cem. Concr. Res., 29, 945, (1999).
- (12) Alaejos Gutierrez P., Fernandez Canovas M. El coeficiente de eficacia del humo de silice. Mat. de Construc. 49, 253, 57, (1999).
- (13) Toutanji H.A., Bayasi Z. Effect of curing procedures on properties of silica fume concrete. Cem. Concr. Res., 29, 497, (1999).
- (14) Kjellsen K.O., Atlasi E.H. Pore structure of cement silica fume systems. Presence of hollow-shell pores. Cem. Concr. Res., 29, 133, (1999).
- (15) Papadakis V.G.. Experimental investigation and theoretical modeling of silica fume activity in concrete. Cem. Concr. Res., 29, 79, (1999).&, 03-05. Toulouse (1998).
- (16) ASTM C143. Standard test method for slump of Portland cement concrete. Annual Book ASTM Standards 04, 02, 85 (1988).  
Kara Ali R., Gallias J.L. Action des additions minérales sur la maniabilité et le caractéristiques mécaniques des mortiers. Science des matériaux et propriétés des betons. Rencontres Int. 1, 0.3-05. Toulouse (1998).

- (17) ASTM C 494 Standard specification for chemical admixtures for concrete. Annual Book ASTM Standards 04,02,245 (1998).  
 Duval R., Kadri E.H. La fumée de silice et la maniabilité des bétons à hautes performances. *Annales Bat. Trav. Publ.* 5,21 (1997).  
 Agullo L.T., Toralles Carbonari B., Gettu R., Aguado A. Fluidity of cement pastes with mineral admixtures and superplasticizer. A study based on the Marsh cone test. *Materials Struc.*, 32,221,479 (1999).
- (18) Xu Y., Chung D.D.L. Improving the workability and strength of silica fume concrete by using silane-treated silica fume. *Cem. Concr. Res.*, 29,451, (1999).
- (19) Alexander H.G., Magee B.J. Durability performance of concrete containing condensed silica fume. *Cem. Concr. Res.*, 29,917 (1999).
- (20) Fu X., Chung D.D.L. Effect of silica fume, latex, methylcellulose and carbon fibers on the thermal conductivity and specific heat of cement paste. *Cem. Concr. Res.*, 27,12,1799 (1997).
- (21) Rao G.A.. Influence of silica fume replacement on expansion and drying shrinkage. *Cem. Concr. Res.*, 28,10,1505 (1998).
- (22) Young J.F. Densified cement pastes and mortars. *Cementing the future*, Evans-ton, ACBM,9,2,4-5 (1997).
- (23) Radjy F.F., Bogen T., Sellevold E.J. Loeland K.E. A review of experiences with condensed silica fume, slag and natural pozzolans in concrete. *ACI SP-91*, 1135 (1986).
- (24) Park S.B., Yoon E.S. Lee B.I. Effect of processing and materials variations on mechanical properties of light weight cement composites. *Cem. Concr. Res.*, 29,193 (1999)
- (25) Sersale R., Giordano Orsini P. Hydrated phases after reaction of lime with "pozzolanic" materials or with blastfurnace slag. *Proc. 5th Int. Symp. Chem. Cement*, IV, 114. Tokyo (1969).  
 Sersale R. Meccanismo e prodotti di reazione della calce con le pozzolane e con le scorie d'alto forno. *Atti Acc. Pontaniana*, XX, 5. Napoli (1971).  
 Jiang W., Silsbee M.R., Roy D.M. Similarities and differences of microstructure and macro properties between Portland and blended cement. *Cem. Concr. Res.*, 22,10,1501 (1977).
- (26) Johansson K., Larsson C., Antzugin O.N., Forsling W., Rao Rota M., Ronin W. Kinetics of hydration reactions in cement paste with mechanochemically modified cement Si magic-angle-spinning NMR study. *Cem. Concr. Res.*, 29,1575 (1999).
- (27) Regourd M., Mortureux B., Hornain H. In: Fly ash, silica fume, slag and other mineral by-products in concrete. *Sp. Publ. Sp. 79*, 2,847. Amer. Concr. Inst. Detroit (1983).
- (28) Tan K., Pu X. Strengthening effects of finely ground fly ash, granulated blastfurnace slag and their combination *Cem. Concr. Res.*, 28,12,1819 (1999).
- (29) Haque M.N., Kayali O. Properties of high-strength concrete using a fine fly ash. *Cem. Concr. Res.*, 28,10, 1445 (1998).
- (30) Ganghua P., Wei S., Dajun D. Studio delle proprietà meccaniche di HPC contenenti sia cenere volante, che fumo di silice. *L'Ind. Ital. Cemento*, 11,842 (1999).



## A note on thermal convection for fluids with strongly temperature dependent viscosity

Nota di F. Capone<sup>1\*</sup> e M. Gentile<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 6 maggio 2000)

**Abstract.** A nonlinear energy stability analysis of the onset of convection for fluids with viscosity depending exponentially on temperature, is performed. Conditions ensuring global, nonlinear stability in the  $L^2$ -norm are obtained.

**Riassunto.** Si affronta il problema dell'insorgere della convezione naturale per fluidi con viscosità dipendente esponenzialmente dalla temperatura. Attraverso il metodo dell'energia si ottiene una condizione di stabilità globale, non lineare della quiete.

### 1 Introduction

The thermal convection for fluids with temperature dependent viscosity has been studied - in the past as nowadays - by many authors (see, for instance, [1], [5], [7], [9]). This depends on the fact that there are fluids for which the viscosity varies strongly with temperature and hence it is not realistic to consider for them constant viscosity. In [5] the general problem of how the viscosity depends on the temperature has been considered and has been pointed out that for most of fluids the exponential type dependence seems to be the most appropriate. For many real liquids, for example in industrial applications and in geophysics, the appropriate exponential dependence is the following one:

$$(1.1) \quad \nu(T) = \nu_0 \exp[-\eta(T - T_0)]$$

where  $\nu_0$  and  $\eta$  are positive constants and  $T_0$  is a reference temperature.

---

<sup>1</sup>Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Complesso "Monte S. Angelo". Edificio "T". Via Cintia- 80126 Napoli.

As concerns the problem of the onset of convection for exponential fluids, in [2], on applying the energy method through a suitable Liapunov functional, the Authors point out that the conditions ensuring linear stability ensures nonlinear stability of the motionless state, under *restriction on the initial data* (conditional stability).

The aim of this Note is to reconsider the problem analyzed in [2] in order to eliminate the restriction on the initial data, obtaining conditions of *global nonlinear stability*.

The plain of the Note is the following. Section 2 is dedicated to some preliminaries. In particular we put perturbation equations of the Bénard problem in a suitable dimensionless form. In section 3 we determine a global nonlinear stability threshold of the motionless state with respect to the  $L^2$ - norm of the perturbation fields.

## 2 Statement of the problem

Let us consider the equations governing the motion of a fluid in the horizontal layer  $\{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq z \leq d\}$ , taking into account the viscosity variation (1.1):

$$(2.1) \quad \begin{cases} v_{i,t} + v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu_0 \{ \exp[-\eta(T - T_0)] 2D_{ij} \}_{,j} + g\alpha(T - T_0)\delta_{i3} \\ v_{i,i} = 0 \\ T_{,t} + v_i T_{,i} = k \Delta T \end{cases}$$

where  $z$  is the upward vertical,  $v_i$  is the velocity field,  $\rho$  is the density of the fluid,  $p$  is the reduced pressure,  $\nu_0$  is the viscosity at the reference temperature  $T_0$ ,  $D_{ij}$  is the symmetric part of the velocity gradient,  $g$  is the gravity,  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient,  $k$  is the thermal diffusivity and  $T$  is the temperature.

We assume that:

$$(2.2) \quad T = T_1 + \Delta\mathcal{T} \quad \text{on } z = 0, \quad T = T_1 \quad \text{on } z = d$$

with  $\Delta\mathcal{T} > 0$ . On introducing the following dimensionless quantities:

$$t = t^* \frac{d^2}{\nu_0}, \quad p = p^* \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \frac{\nu_0 k \rho}{d^2}, \quad Pr = \frac{\nu_0}{k}, \quad v_i = v_i^* \frac{k}{d}$$

$$T = T^* \Delta \tau \quad , \quad R = \sqrt{\frac{\alpha \Delta \tau g d^3}{k \nu_0}} \quad , \quad x_i = x_i^* d \quad , \quad \Gamma = \eta \Delta \tau$$

dropping all asterisks, the dimensionless form of the system (2.1) in the strip  $R^2 \times [0, 1]$  is:

$$(2.3) \quad \begin{cases} v_{i,t} + Pr^{-1} v_j v_{i,j} = -p_{,i} + \{\exp[-\Gamma(T - T_0)] 2D_{ij}\}_{,j} + R^2(T - T_0)\delta_{i3} \\ v_{i,i} = 0 \\ PrT_{,t} + v_i T_{,i} = \Delta T \end{cases}$$

to which we add the boundary conditions

$$T = T_1 + 1 \quad \text{on } z = 0; \quad T = T_1 \quad \text{on } z = 1.$$

Here we study the stability of steady solution  $m_0 = (\bar{\mathbf{v}} = 0; \bar{T}(z) = -z + 1 + T_1; \bar{p}(z))$ , where  $\bar{p}(z)$  is such that

$$\frac{d\bar{p}(z)}{dz} = R^2(\bar{T}(z) - T_0).$$

On denoting by  $R\mathbf{u}, \theta, R\pi$ , respectively, the dimensionless perturbation to the velocity, temperature and pressure fields, with  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , the dimensionless equations governing the perturbation fields in the strip  $R^2 \times [0, 1]$  are:

$$(2.4) \quad \begin{cases} u_{i,t} + Pr^{-1} R u_j u_{i,j} = -\pi_{,i} + \{\exp[\Gamma(z - \xi) - \Gamma\theta] 2d_{ij}\}_{,j} + R\theta \delta_{i3} \\ u_{i,i} = 0 \\ Pr\theta_{,t} + R u_i \theta_{,i} = R w + \Delta \theta, \end{cases}$$

where  $d_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  and  $\xi = T_1 + 1 - T_0$ .

To the previous system we append the following boundary and initial conditions :

$$(2.5.1) \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Delta w = 0 \quad z = 0, 1$$

$$(2.5.2) \quad \theta = \Delta \theta = 0 \quad z = 0, 1$$

$$(2.5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad z = 0, 1$$

$$(2.6) \quad \mathbf{u}(P, 0) = \mathbf{u}_0(P), \quad \theta(P, 0) = \theta_0(P).$$

In the sequel - as usual - we assume that the perturbation fields are periodic functions of  $x$  and  $y$  of periods  $2\pi/a_x$ ,  $2\pi/a_y$  ( $a_x > 0$ ,  $a_y > 0$ ). We shall denote by  $\Omega$  the periodicity cell :  $\Omega = [0, 2\pi/a_x] \times [0, 2\pi/a_y] \times [0, 1]$  and by  $\langle \cdot \rangle$  and  $\| \cdot \|$  respectively the integral and the  $L^2$ -norm on  $\Omega$ . Finally, since the stability of  $m_0$  makes sense only in a class of solutions of (2.4) - (2.6) in which  $m_0$  is unique, we exclude any other rigid solution on requiring that

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0.$$

### 3 Nonlinear stability

In this section we perform the nonlinear energy stability analysis of the motionless state  $m_0$ . To this end, first of all, we recall an a priori estimate of the temperature field obtained in [3].

**Property 1** - *Let us define the sets*

$$(3.1) \quad \Omega_1 = \{P \in \Omega : \theta(P, t) > T_1 + 1 - \bar{T}(z)\}$$

and

$$(3.2) \quad \Omega_2 = \Omega - \Omega_1 = \{P \in \Omega : \theta(P, t) \leq T_1 + 1 - \bar{T}(z)\}.$$

If

$$(3.3) \quad \theta_0(P) \in W^{2,2}(\Omega)$$

then:

$$(3.4) \quad \theta(P, t) + \bar{T}(z) - T_1 - 1 \leq \bar{\theta}_0, \quad \text{a.e. on } \Omega_1,$$

where

$$(3.5) \quad \bar{\theta}_0 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} [(\theta_0(P) + \bar{T}(z) - T_1 - 1)_+] (< \infty).$$

Then we introduce the Liapunov functional

$$(3.6) \quad V(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} Pr \|\theta\|^2.$$

Evaluating the time derivative of  $V$  along the solution of (2.4) – (2.5), then it follows:

$$(3.7) \quad \frac{dV}{dt} = 2R \langle \theta w \rangle - 2 \langle \exp[\Gamma(z - \xi) - \Gamma\theta] d_{ij} d_{ij} \rangle - \|\nabla\theta\|^2.$$

Now, by virtue of the Property 1, it turns out

$$(3.8) \quad \frac{dV}{dt} \leq 2R \langle \theta w \rangle - 2 \exp[-\Gamma(\bar{\theta}_0 + 1)] \langle \exp[\Gamma(z - \xi)] d_{ij} d_{ij} \rangle - \|\nabla\theta\|^2$$

where  $\bar{\theta}_0$  is given by (3.5) and  $f_+ = \max\{0, f\}$ . On setting  $\hat{\mathbf{u}} = \exp[-\Gamma(\bar{\theta}_0 + 1)/2] \mathbf{u}$ , from (3.8) we obtain

$$(3.9) \quad \frac{dV}{dt} \leq 2R \exp[\Gamma(\bar{\theta}_0 + 1)/2] \langle \theta \hat{w} \rangle - 2 \langle \exp[\Gamma(z - \xi)] \hat{d}_{ij} \hat{d}_{ij} \rangle - \|\nabla\theta\|^2$$

where  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ . Now, by following the standard energy method, we set [8]

$$(3.10) \quad \frac{1}{R_L} = \max_{\mathcal{K}} \frac{I}{D}$$

where  $I = 2 \langle \theta \hat{w} \rangle$ ,  $D = \langle \exp[\Gamma(z - \xi)] \hat{d}_{ij} \hat{d}_{ij} \rangle + \|\nabla\theta\|^2$  and  $\mathcal{K}$  is the class of the *admissible kinematic perturbations* given by

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{u}, \theta : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \mathbf{u}, \theta \text{ are periodic functions of } x \text{ and } y$$

and satisfies the boundary conditions (2.6),  $D < \infty\}$

From (3.9), taking into account (3.10), it follows

$$(3.11) \quad \frac{dV}{dt} \leq \left( \frac{R \exp[\Gamma(\bar{\theta}_0 + 1)/2] - R_L}{R_L} \right) D$$

and hence the following theorem holds true.

**Theorem 1** - *In the class of perturbations  $\theta(P, t)$  such that*

$$\bar{\theta}_0 < M$$

*where  $M$  is a positive constant, the condition*

$$R < R_E$$

*where  $R_E$  is given by*

$$R_E = R_L \exp[-\Gamma(M + 1)/2]$$

*ensures the asymptotic, exponential, nonlinear stability of the steady solution  $m_0$  with respect to the  $V$ -norm, according to the following inequality*

$$(3.12) \quad V(t) \leq V(0) \exp \left[ \frac{R - R_E}{R_E} t \right], \quad t \geq 0.$$

**Remark 1** - *The linear operator of the problem (2.4) – (2.5) is symmetric with respect to the  $L^2$ -scalar product. This symmetry guarantees that*

$$R \leq R_L$$

*is a necessary and sufficient condition for the linear stability of  $m_0$  [5].*

**Remark 2** - *The nonlinear stability threshold*

$$R_E = R_L \exp[-\Gamma(M + 1)/2]$$

*is less than  $R_L$ . But we point out that when  $R \rightarrow R_E$ , to have stability of  $m_0$ , from (3.12) do not arise that the initial data have to become vanishingly small.*

**Table 1 - Critical Rayleigh values [2]**

$\Gamma$	$Ra_L^2$	$a_c^2$
1	675.481	4.833
3	814.874	4.190
5	1081.81	3.597
8.2	1544.48	8.649
8.3	1545.07	8.997
8.4	1544.46	9.343
8.8	1530.90	10.70
9	1518.11	11.37

$$Ra_L^2 = \min_{a^2} R_L^2 .$$

### Acknowledgements

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I. N. D. A. M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of wave propagation and stability in continuous media". The Authors thank gratefully Prof. S.Rionero for having proposed the present research and for his helpful suggestions.

### References

- [1] Booker, J.R.: Thermal convection with strongly temperature dependent viscosity. *J. Fluid Mech.* 76, 741-754 (1976).
- [2] Capone, F., Gentile M.: Nonlinear stability analysis of convection for fluids with exponentially temperature-dependent viscosity, *Acta Mech.* 107, 53-64 (1994).
- [3] Capone, F., Rionero S.: Temperature dependent viscosity and its influence on the onset of convection in a porous medium, *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli LXVI*, 159-172 (1999).
- [4] Flavin, J., Rionero, S.: Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction. Boca Raton, Florida: CRC Press 1996.
- [5] Jenkins, D.R.: Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature dependent viscosity. *J. Fluid Mech.* 178, 491-506 (1987).

- [6] Joseph,D.D.: Stability of fluid motions I, II . Berlin-Heidelberg New York: Springer Verlag 1976.
- [7] Richardson,L.; Straughan,B.: A nonlinear energy stability analysis of convection with temperature - dependent viscosity. *Acta Mechanica* 97, 41-49 (1993).
- [8] Rionero,S.: Metodi variazionali per la stabilitá asintotica in media in magnetoidrodinamica. *Ann. Mat. Pura Appl.* 78, 339-364 (1968).
- [9] Stengel,K.C.; Oliver,B.S.; Booker,J.R.: Onset of convection in a variable viscosity fluid. *J.Fluid Mech.* 120, 411-431 (1982).
- [10] Straughan,B.: The energy method, stability and nonlinear convection. Berlin, Heidelberg New York: Springer Verlag 1992.

## Thermal convection with horizontally periodic temperature gradient

Nota di F. Capone<sup>1\*</sup> e S. Rionero<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 6 maggio 2000)

**Abstract** Thermal convection for fluids with a stationary and spatially periodic temperature gradient is performed. Conditions ensuring nonlinear global energy stability with respect to the  $L^2$ -norm of the conduction solution, are obtained.

**Riassunto.** Si studia il problema della convezione termica in presenza di un gradiente orizzontale di temperatura, spazialmente periodico. Si determina la soluzione di conduzione corrispondente e se ne studia la stabilità non lineare in energia ottenendo risultati di stabilità globale rispetto alla norma di  $L^2$ .

### 1 - Introduction

Thermal convection in a horizontal fluid layer uniformly heated from below has been studied – in the past as nowadays – by many authors (see, for instance, [1], [3-5],[8-10],[15-17]). In fact, as it is well known, thermal convection is of fundamental importance in many applications like, for example, climatology and the diffusion of pollution in the atmosphere.

Recently this problem has been studied by many researches on assuming that the layer didn't be uniformly heated from below, but the presence of a spatially constant temperature gradient has been considered [7], [11-14]. Even if this is a more realistic situation, a spatially constant temperature gradient has a (serious) drawback: it implies at infinity an *infinite temperature on the horizontal planes*.

The aim of this paper is to avoid boundedness temperature behaviour on the

---

<sup>1</sup>Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli", Complesso "Monte S. Angelo". Edificio "T". Via Cintia- 80126 Napoli.

horizontal planes. To this end, we consider – on the lower plane of the layer – a stationary spatially periodic temperature gradient which implies a bounded temperature.

The plan of the paper is the following. Section 2 is dedicated to introduce thermal convection problem of a fluid in an infinite horizontal layer (Bénard problem) under the assumption that the lower plane is not uniformly heated, but is maintained to a spatially periodic temperature – in the horizontal direction – greater than one of the upper plane (uniformly heated). Then, after having obtained a suitable dimensionless form of the evolution equations, we determine the motionless state with a bounded temperature profile in all directions. Then (Section 3) we perform the nonlinear stability analysis of the conduction solution and global (nonlinear) stability results are obtained. Finally, in Section 4, we evaluate numerically the energy stability threshold versus horizontal temperature gradient.

## 2 - Statement of the problem

Let us consider the equations governing the motion of a fluid in the horizontal layer  $\{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq z \leq d\}$

$$(2.1) \quad \begin{cases} v_{i,t} + v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho_0} p_{,i} + \nu \Delta v_i + g\alpha(T - T_0)\delta_{i3} \\ v_{i,i} = 0 \\ T_{,t} + v_i T_{,i} = k \Delta T \end{cases}$$

where  $z$  is the upward vertical,  $v_i$  is the velocity field,  $T$  is the temperature,  $T_0$  is a reference temperature,  $\rho_0$  is the density of the fluid at the temperature  $T_0$ ,  $p$  is the reduced pressure,  $\nu$  is the kinematic viscosity,  $g$  is the gravity,  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient and  $k$  is the thermal diffusivity. Concerning the boundary conditions, we suppose that a horizontal temperature gradient in addition to the heating of the lower bounding plane with respect to the upper plane of the layer is acting. To this end, let be  $\Delta T (> 0)$  the constant temperature difference between the points belonging to the bottom plane and that ones belonging to the top plane at  $x = 0$ . To the system (2.1) we append the boundary conditions

$$(2.2) \quad T(z = 0) = \left[ \alpha^* \Delta T \frac{e^2 - 1}{2e} \right] \sin\left(\frac{x}{d}\right) + T_1 + \Delta T, \quad T(z = d) = T_1 \quad (\alpha^* > 0)$$

with  $\alpha^* \in (0, 0.850918)^2$

On introducing the following dimensionless quantities:

$$t = t^* \frac{d^2}{\nu}, \quad p = p^* \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \frac{\nu k \rho_0}{d^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{k}, \quad v_i = v_i^* \frac{k}{d}$$

$$T = T^* \Delta \mathcal{T}, \quad R_T = \sqrt{\frac{\alpha \Delta \mathcal{T} g d^3}{k \nu}}, \quad x_i = x_i^* d, \quad T_i = T_i^* \Delta \mathcal{T} \quad (i = 0, 1)$$

where, in particular,  $R_T$  is the (vertical) Rayleigh number and  $Pr$  is the Prandtl number, dropping all asterisks, the dimensionless form of the system (2.1) in the strip  $R^2 \times [0, 1]$  is:

$$(2.3) \quad \begin{cases} v_{i,t} + Pr^{-1} v_j v_{i,j} = -p_{,i} + \Delta v_i + R_T^2 (T - T_0) \delta_{i3} \\ v_{i,i} = 0 \\ Pr T_{,t} + v_i T_{,i} = \Delta T \end{cases}$$

to which we add the boundary conditions

$$(2.4) \quad T(z=0) = \left[ \alpha^* \frac{e^2 - 1}{2e} \right] \sin x + T_1 + 1, \quad T(z=1) = T_1.$$

<sup>2</sup>On taking into account the boundary conditions (2.2), to have that the layer is heated from below (even if not uniformly), we must require that

$$T(z=0) - T(z=d) > 0$$

i.e.

$$(1) \quad \alpha^* \sin \left( \frac{x}{d} \right) \frac{e^2 - 1}{2e} + 1 > 0.$$

Then, if

$$-\alpha^* \frac{e^2 - 1}{2e} + 1 > 0$$

and hence

$$\alpha^* \in (0, 0.850918)$$

the inequality (1) is satisfied and the layer is (not uniformly) heated from below.

The boundary value problem (2.3) – (2.4) admits the following motionless state (conduction solution) [2]:

$$m_0 = \{ \mathbf{v}_b = 0; T_b(x, z) = \alpha^* \sin h(1 - z) \sin x - z + T_1 + 1; p_b(z) \},$$

in which let us underline that the basic temperature field  $T_b(x, z)$  exhibits a periodic behaviour in the  $x$ -direction and hence we are considering a bounded temperature in horizontal directions. We remark that  $\alpha^* \in (0, 0.6497944)$  guarantees that the layer is heated from below and further that  $T_b(x, z)$  is a decreasing function of  $z$  in the interval  $[0, 1]^3$ .

Since we want to study the stability of  $m_0$ , on denoting by  $R_T \mathbf{u}$ ,  $\theta$ ,  $R_T \pi$ , respectively, the dimensionless perturbation to the velocity, temperature and pressure fields, with  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , we write the dimensionless equations governing the evolution of the perturbation fields in the strip  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , i.e.

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{i,t} + Pr^{-1} R_T u_j u_{i,j} = -\pi_{,i} + \Delta u_i + R_T \theta \delta_{i,3} \\ u_{i,i} = 0 \\ Pr \theta_{,t} + R_T u_i \theta_{,i} = \Delta \theta + R_T w \\ \quad - R_{HT} [\cos x \sin h(1 - z)]u + R_{HT} [\sin x \cos h(1 - z)]w \end{cases}$$

where  $R_{HT} = \alpha^* R_T$  is the horizontal Rayleigh number. To the previous system we append the following boundary conditions :

<sup>3</sup>In fact one has that

$$\frac{\partial T_b}{\partial z}(x, z) = -\alpha^* \cos h(1 - z) \sin x - 1$$

and hence:

- i) if  $\sin x > 0$ , we have that  $\frac{\partial T_b}{\partial z}(x, z) < 0$ ;
- ii) if  $\sin x < 0$ , since  $\frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2}(x, z) = \alpha^* \sin h(1 - z) \sin x \leq 0 \quad \forall z \in [0, 1]$ , to have  $\frac{\partial T_b}{\partial z}(x, z) < 0$  it is sufficient to choose  $\alpha^* (> 0)$  such that  $\frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2}(x, 0) < 0$ . Hence, since  $\frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2}(x, 0) = -\alpha^* \frac{e^2 + 1}{2e} \sin x - 1$ , it is sufficient to choose

$$(0 <) \alpha^* < \frac{2e}{e^2 + 1} = 0.6497944.$$

$$(2.6.1) \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Delta w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{on } z = 0, 1$$

in the case of *both free bounding planes*, or

$$(2.6.2) \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u = v = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{on } z = 0, 1$$

in the case of *both rigid bounding planes*, or *mixed conditions* if we have *one rigid and one free bounding planes*.

In the sequel - as usual - we assume that the perturbation fields are periodic functions of  $x$  and  $y$  of periods  $2\pi/a_x$ ,  $2\pi/a_y$  ( $a_x > 0$ ,  $a_y > 0$ ). We shall denote by  $\Omega$  the periodicity cell:  $\Omega = [0, 2\pi/a_x] \times [0, 2\pi/a_y] \times [0, 1]$  and by  $\langle \cdot \rangle$  and  $\| \cdot \|$  respectively the integral and the  $L^2$ -norm on  $\Omega$ . Finally, since the stability of  $m_0$  makes sense only in a class of solutions of (2.5) - (2.6) in which  $m_0$  is unique, we exclude any other rigid solution on requiring that

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0.$$

### 3 - Nonlinear stability

In this section we perform the nonlinear energy stability analysis of the conduction solution  $m_0$ . To this end let us introduce the following Liapunov functional

$$(3.1) \quad V(t) = \frac{1}{2} \| \mathbf{u} \|^2 + \frac{Pr}{2} \| \theta \|^2.$$

On evaluating the time derivative of  $V(t)$  along the solutions of (2.5) - (2.6) (in the case of both free bounding planes, or in the case of both rigid bounding planes, or, finally, when we have one rigid and one free bounding plane) we obtain

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & 2R_T \langle w\theta \rangle - \| \nabla \mathbf{u} \|^2 - \| \nabla \theta \|^2 \\ & - R_{HT} \langle [\cos x \sin h(1-z)] u\theta \rangle + R_{HT} \langle [\sin x \cos h(1-z)] w\theta \rangle \end{aligned}$$

**Remark 1** - *Let us underline that the linear operator of the problem (2.5) – (2.6) is not symmetric with respect to the  $L^2$ -scalar product. For this reason the eigenvalues of the linear problem could be a priori complex numbers.*

Now let us consider the last two terms in (3.2), on applying Cauchy, Poincaré and Wirtinger inequalities we obtain

$$(3.3) \quad R_{HT} < [\cos x \sinh(1-z)] u \theta > \leq \frac{R_{HT} A}{2\pi^2} (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2)$$

$$(3.4) \quad R_{HT} < [\sin x \cosh(1-z)] w \theta > \leq \frac{R_{HT} B}{2\pi^2} (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2),$$

where

$$A = \max_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} [\cos x \sinh(1-z)] = 1.17520$$

and

$$B = \max_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} [\sin x \cosh(1-z)] = 1.54308.$$

On taking into account (3.3) and (3.4), from (3.2) one has

$$(3.5) \quad \frac{dV}{dt} \leq \left[ \frac{R_T}{R_{BN}} + \frac{R_{HT}(A+B)}{2\pi^2} - 1 \right] (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2),$$

where  $R_{BN}$  is the stability threshold of the classical Bénard problem, i.e.  $R_{BN}^2 = 657.511$  in the case of free-free bounding planes,  $R_{BN}^2 = 1707.762$  in the case of rigid-rigid boundary conditions and finally  $R_{BN}^2 = 1100.65$  in the case of one free and one rigid bounding plane.

Hence, since  $R_{HT} = \alpha^* R_T$ , from (3.5) we get

$$(3.6) \quad \frac{dV}{dt} \leq \left\{ \frac{[2\pi^2 + \alpha^*(A+B)R_{BN}]R_T - 2\pi^2 R_{BN}}{2\pi^2 R_{BN}} \right\} (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2).$$

Starting from (3.6), by virtue of Poincaré and Wirtinger inequalities [16]:  $\exists \gamma > 0 : \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \theta\|^2 \geq \gamma V$ , the following stability theorem holds true

**Theorem 1 - On setting**

$$(3.7) \quad R_E = \frac{2\pi^2 R_{BN}}{2\pi^2 + \alpha^*(A+B)R_{BN}},$$

the condition

$$(3.8) \quad R_T < R_E$$

ensures the asymptotic, exponential, global nonlinear stability of the conduction solution  $m_0$  with respect to the  $V$ -norm, according to the following inequality

$$(3.9) \quad V(t) \leq V(0) \exp \left\{ \gamma \frac{R_T - R_E}{R_E} t \right\}, \quad t \geq 0.$$

**4 - Numerical results**

In this section we evaluate numerically the energy stability threshold of the conduction solution  $m_0$  versus  $\alpha^*$ . Through the Tables 1-3, we compare the critical thresholds obtained with that ones linked to the maximum (positive) temperature difference between the lower and the upper planes bounding the layer on considering the following definition of the Rayleigh number:

$$\bar{R}_T = R_T \sqrt{1 + \alpha^* \frac{e^2 - 1}{2e}}.$$

**Table 1 - Free-Free case: Critical Rayleigh numbers**

$\alpha^*$	$R_E^2$	$\bar{R}_E^2$
0	657.5110	657.5110
0.1	359.1138	401.3169
0.3	155.0398	209.7007
0.5	85.9670	136.4813
0.7	54.5496	99.4243
0.8	44.9425	87.1958

**Table 2 - Rigid-Rigid case: Critical Rayleigh numbers**

$\alpha^*$	$R_E^2$	$\bar{R}_E^2$
0	1707.7500	1707.7500
0.1	693.6376	775.1540
0.3	233.0050	315.1533
0.5	170.6159	270.8698
0.7	68.7606	125.3258
0.8	55.3886	107.4627

**Table 3 - Free-Rigid case: Critical Rayleigh numbers**

$\alpha^*$	$R_E^2$	$\bar{R}_E^2$
0	1100.6470	1100.6470
0.1	518.5731	579.5159
0.3	195.8544	264.9050
0.5	102.0363	161.9928
0.7	62.4527	113.8288
0.8	50.7953	98.5510

**Acknowledgements** - This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): “Nonlinear mathematical problems of wave propagation and stability in continuous media”.

**References**

[1] Booker, J.R.: Thermal convection with strongly temperature dependent viscosity. *J. Fluid Mech.* **76**, 741-754 (1976).

- [2] Carslaw, H.S.; Jaeger, J.C.: Conduction of heat in solids. Oxford at the Clarendon Press 1959.
- [3] Chandrasekhar, S.: Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover 1961.
- [4] Flavin, J., Rionero, S.: Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction. Boca Raton, Florida: CRC Press 1996.
- [5] Jenkins, D.R.: Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature dependent viscosity. *J. Fluid Mech.* **178**, 491-506 (1987).
- [6] Joseph, D.D.: Stability of fluid motions I,II, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1976.
- [7] Manole, D.M.; Lage, J.L.; Nield, D.A.: Convection induced by inclined thermal and solutal gradients, with horizontal mass flow, in a shallow horizontal layer of a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, no. 14, pp. 2047- 2057, 1994.
- [8] Mulone G., Rionero S.: On the nonlinear stability of the magnetic Bénard problem with rotation. *Z. angew. Math. Mech.*, **73**, 1, 33-45 (1993)
- [9] Mulone G., Rionero S., Straughan B.: Unconditional nonlinear stability in a polarized dielectric liquid. *Rend. Acc. Lincei*, **7**, 241-252 (1996)
- [10] Mulone G., Rionero, S.: Unconditional nonlinear exponential stability in the Bénard problem for a mixture: necessary and sufficient conditions. *Rend. Acc. Lincei s.9, v.9*, pp.221-236 (1998)
- [11] Nield, D.A.: Convection in a porous medium with inclined temperature gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, no. 1, pp. 87-92, 1991.
- [12] Nield, D.A.: Convection in a porous medium with inclined temperature gradient: additional results. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, no. 18, pp. 3021-3025, 1994.
- [13] Nield, D.A.: Convection in a porous medium with inclined temperature gradient and vertical throughflow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, no. 1, pp. 241-243, 1998.
- [14] Qiao, Z.; Kaloni, P.N.: Non-linear convection in a porous medium with inclined temperature gradient and vertical throughflow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, no. 16, pp. 2549-2552, 1998.

- [15] Stengel, K.C.; Oliver, B.S.; Booker, J.R.: Onset of convection in a variable viscosity fluid. *J.Fluid Mech.* **120**, 411-431 (1982)
- [16] Straughan, B.: *The energy method, stability and nonlinear convection.* Appl. Math. Sci. Ser., **91** Springer-Verlag, New York 1992.
- [17] White, D.B.: The planforms and onset of convection with a temperature - dependent viscosity. *J.Fluid Mech.* **191**, 247-286 (1988).

## **A note on the global nonlinear stability for penetrative convection in porous media for fluids with cubic density**

Nota di M. Gentile<sup>\*</sup>, S. Rionero<sup>\*</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 6 maggio 2000)

Abstract The penetrative convection in a fluid-saturated porous medium with a cubic equation of state for the density is considered, according to the Darcy model. Here, the stability analysis of the conduction solution by using normal modes analysis and the Lyapunov direct method is performed.

Riassunto Si considera il problema della convezione penetrativa per un fluido incompressibile in un mezzo poroso, scegliendo una legge costitutiva cubica per la densità del fluido. Viene affrontato lo studio della stabilità della soluzione stazionaria di conduzione mediante la classica analisi in normal modes e il metodo diretto di Lyapunov.

### **1 Introduction**

Let  $\Sigma$  be a horizontal fluid saturated porous layer, bounded from below by a plane  $\Pi_1$  and from above by a plane  $\Pi_2$ .  $\Pi_1$  is kept at constant temperature  $T_1$ , while  $\Pi_2$  at temperature  $T_2 > T_1$ . Suppose, moreover, that the fluid has a density depending nonlinearly on the temperature (non-Boussinesq approximation), with a maximum in the open interval  $(T_1, T_2)$ . In such a way the maximum is attained over an intermediate plane  $\Pi_3$ . Therefore, owing to the thermal expansion, the fluid near  $\Pi_1$  will be lighter than that near  $\Pi_3$ . Because of this, there will be a tendency on the part of the fluid to redistribute itself and remedy the weakness in its arrangement. So, small perturbations give rise to convective motions, where the fluid particles near  $\Pi_3$  go downward and the ones near  $\Pi_1$  go upward, beyond  $\Pi_3$ , penetrating into the stable upper layer. This phenomenon, known as penetrative convection, and its applications to geophysics and to astrophysics, has attracted the attention of many authors [1,2,3,7,8,9,10,12,13,17,18,19]. In particular, in his pioneering paper, Veronis [12] performed a weakly nonlinear analysis for two stress-free boundaries; successively, in [9] and [12] the authors investigated the Veronis problem performing an energy stability analysis.

---

<sup>\*</sup> Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli". Università di Napoli "Federico II", via Cintia 80126 NAPOLI

The aim of this paper is to analyze the above problem in the setting of porous media [4,11]. In such a case the equations of motion in the layer differ from those of Oberbeck-Boussinesq-Darcy only in the form of dependence of density on temperature in the body force term. In the following we will consider the equation of state:

$$\rho = \rho_0 [1 + \varepsilon_1 \alpha_1 (T - T_0) + \varepsilon_2 \alpha_2 (T - T_0)^2 + \varepsilon_3 \alpha_3 (T - T_0)^3], \quad (1.1)$$

$$\rho_0 = \text{const}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

The scheme of the paper is as follows. In Section 2, we introduce the model and the perturbation equations to the nonconvective stationary solution. Then, Section 3, we perform a linear stability analysis showing that the strong version of the principle of exchange of stabilities holds true. In Section 4, we study the nonlinear stability by means of the Lyapunov direct method, in order to obtain a conditional stability result. In Section 5, we study the nonlinear stability of motionless state via the Lyapunov direct method. By using a weighted energy technique, we find conditions assuring global nonlinear stability. Finally, in Section 6, we consider a variational problem connected to the functional of the previous section and, by means of a numerical analysis, we give nonlinear stability thresholds.

## 2 Statement of the problem

Let us consider a homogeneous fluid contained in a horizontal infinite layer  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1\}$  of a porous medium, under the action of a vertical gravity field  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ , with assigned temperatures  $T(0) = T_1$  and  $T(d) = T_2$ , where  $T_1 < T_2$ . Furthermore we suppose that the density of the fluid, given by (1.1), has a maximum in  $(T_1, T_2)$ .

The Darcy equations are:

$$\begin{aligned} \nabla p &= -\frac{\mu}{k} \mathbf{v} - g\rho\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ (\rho_0 c_0)_m T_t + (\rho_0 c_0)_f \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \kappa_m \Delta T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

with the constitutive law for the density of the fluid given by (1.1) and where:  $z$  is the upward vertical,  $\mathbf{v}$  is the velocity field,  $p$  is the pressure,  $\mu$  is the constant dynamic viscosity,  $g$  is the gravity,  $k$  is the permeability,  $\kappa_m$  is the overall thermal conductivity. Here we study the stability of nonconvecting stationary solution  $m_0(\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \bar{T} = \beta z + T_1, p)$ , with  $\beta = (T_2 - T_1)/d$ .

Let us denote by  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $\theta$ ,  $\pi$  respectively the perturbation to the velocity, the temperature and the pressure fields, and introduce the dimensionless quantities :

$$t = t^* \frac{d^2}{\kappa}, \quad \pi = \pi^* \frac{\mu \kappa}{k}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* d, \quad \kappa = \frac{\kappa_m}{(\rho_0 c_0)_f},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \frac{\kappa}{d}, \quad \theta = \theta^* T^\sharp, \quad T^\sharp = \frac{\kappa}{d} \sqrt{\frac{\beta \mu d^2}{k g \alpha \kappa \rho_0}}, \quad R = \sqrt{\frac{\alpha_1 g \beta d^2 k \rho_0}{\kappa \mu}},$$

$$A = \frac{(\rho_0 c_0)_m}{(\rho_0 c_0)_f}, \quad \xi = \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_1},$$

and where  $R^2$  is the Rayleigh number. Dropping asterisks, the equations governing the perturbation in the strip  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  become:

$$\begin{aligned} \nabla \pi &= -\mathbf{u} - R h_2(z) \theta \mathbf{k} - h_1(z) \theta^2 \mathbf{k} - \frac{\varepsilon_3 a_2}{R} \theta^3 \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ A \theta_t &= \Delta \theta - R w - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta, \end{aligned} \tag{2.2}$$

where:

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \varepsilon_2 a_1 + 3 \varepsilon_3 a_2 (\xi + z), \\ h_2(z) &= \varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2 a_1 (\xi + z) + 3 \varepsilon_3 a_2 (\xi + z)^2, \\ a_1 &= \frac{\alpha_2 \Delta T}{\alpha_1}, \quad a_2 = \frac{\alpha_3 (\Delta T)^2}{\alpha_1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

To the previous system we append the following boundary conditions:

$$w = \theta = 0 \quad \text{on } z = 0, 1. \tag{2.4}$$

In the sequel we assume, as usual, that the perturbation fields  $\mathbf{u}, \theta, \pi$  are sufficiently smooth, that they are periodic functions of  $x$  and  $y$ , of periods  $2\pi/a_1, 2\pi/a_2$ . We shall denote by  $\Omega = [0, 2\pi/a_1] \times [0, 2\pi/a_2] \times [0, 1]$  the periodicity cell, and  $a = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}$  the wave number, by  $\langle \cdot \rangle$  and  $\| \cdot \|$  respectively the integral and the  $L^2$ -norm on  $\Omega$ . Finally, taking into account the fact that the stability of  $m_0$  makes sense only in a class of solutions of (2.2) in which  $m_0$  is unique, we exclude any other rigid solution requiring

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0.$$

### 3 Linear stability analysis: Principle of Exchange of Stabilities

Let us consider the linear version of the system (2.2):

$$\begin{aligned}\nabla\pi &= -\mathbf{u} - R h_2(z)\theta\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ A\theta_t &= \Delta\theta - R w.\end{aligned}\tag{3.1}$$

First of all, we point out that the linear operator  $\mathcal{L}$  governing the problem (3.1), is not symmetric with respect to the usual scalar product in the Lebesgue space  $L^2$  (see Appendix). Nevertheless we will prove that all the eigenvalues of  $\mathcal{L}$  are real.

**Theorem 1.** Let us consider the linear system

$$\begin{aligned}\nabla\pi &= -\mathbf{u} - R H(z)\theta\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ A\theta_t &= \Delta\theta - R w,\end{aligned}\tag{3.2}$$

where  $H(z)$  is a real function. Then the *Strong Principle of Exchange of Stabilities* holds.

**Proof.** By taking the double curl of (3.2)<sub>1</sub> and projecting it on the  $z$  axis, we obtain the following system:

$$\begin{aligned}\Delta w + R H(z)\Delta_1\theta &= 0 \\ A\theta_t &= \Delta\theta - R w,\end{aligned}\tag{3.3}$$

where  $\Delta_1 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ . Next, consider perturbations of the type:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{\sigma t} \\ \theta(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x})e^{\sigma t}, \end{cases}\tag{3.4}$$

with  $\sigma$  a priori complex number. Substituting in (3.3) it turns out:

$$\begin{aligned}\Delta w + R H(z)\Delta_1\theta &= 0 \\ \sigma A\theta &= \Delta\theta - R w\end{aligned}\tag{3.5}$$

From the previous system it can be obtained easily the following equation:

$$\sigma A\Delta\theta = \Delta^2\theta + R^2 H(z)\Delta_1\theta.\tag{3.6}$$

We now multiply (3.6) by  $\theta^*$  (the complex conjugate of  $\theta$ ) and integrate over  $\Omega$ . Integrating by parts and using the boundary conditions (2.4) we find out:

$$\sigma A \|\nabla\theta\|^2 = R^2 \langle H(z)|\nabla_1\theta|^2 \rangle - \|\Delta\theta\|^2, \quad (3.7)$$

where  $\nabla_1 = \partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j}$ . From (3.7) it follows that:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\sigma) &= \frac{R^2 \langle H(z)|\nabla_1\theta|^2 \rangle - \|\Delta\theta\|^2}{A \|\nabla\theta\|^2}, \\ \operatorname{Im}(\sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

and hence all the eigenvalues are real numbers.

In order to study the linear stability [5] of  $m_0$ , we observe that by virtue of Theorem 1, when  $H = h_2$ , the critical perturbations verify the linear stationary equations:

$$\begin{aligned} \Delta w + R h_2(z) \Delta_1 \theta &= 0 \\ \Delta \theta - R w &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

On considering normal modes perturbations:

$$\begin{cases} w = W(z) \exp[i(a_1 x + a_2 y)] \\ \theta = \Theta(z) \exp[i(a_1 x + a_2 y)] \end{cases} \quad (3.10)$$

from (3.9) it turns out:

$$\begin{aligned} D^2 W &= a^2 W + a^2 R h_2(z) \Theta \\ D^2 \Theta &= R W + a^2 \Theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

To solve the eigenvalues problem, it is necessary to know the coefficients of the real function  $h_2(z)$ , which depend on the fluid we are considering. In the case of the water a good approximation for the density, in the interval  $[0^\circ C, 40^\circ C]$  is given by (1.1) [10], where  $T_0 = 0$ ,  $\rho_0$  is the density at  $0^\circ C$  and:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 6.85650 \times 10^{-5} (^\circ C^{-1}), \\ \alpha_2 &= 8.82063 \times 10^{-6} (^\circ C^{-2}), \\ \alpha_3 &= 4.16668 \times 10^{-8} (^\circ C^{-3}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

In this case, by using the compound matrix method and the golden section search [16], we found the numerical values listed in Table 1.

**Table 1 - Critical Rayleigh numbers of the linear instability in the case of water.**

$\Delta T$	$R_L^2$	$a^2$
1	45.26	9.86
2	52.85	9.91
3	63.23	9.99
4	78.02	10.19
5	100.11	10.77
6	133.80	12.32
7	181.46	16.12

#### 4 Conditional nonlinear energy stability

In this section we will study the nonlinear stability of  $m_0$ , through the Lyapunov direct method [6]. To this end, let us introduce the Lyapunov functional:

$$V_0(t) = \frac{\lambda A}{2} \|\theta\|^2, \tag{4.1}$$

where  $\lambda$  is a positive parameter to be chosen suitably later. On taking into account (2.4), the time derivative of (4.1) along the solutions of the system (2.2) is given by:

$$\dot{V}_0 = RI_0 - D_0 - \langle h_1(z)\theta^2 w \rangle - \frac{\varepsilon_3 a_2}{R} \langle \theta^3 w \rangle, \tag{4.2}$$

where:

$$I_0 = - \langle [\lambda + h_2(z)] \theta w \rangle, \quad D_0 = \|\mathbf{u}\|^2 + \lambda \|\nabla \theta\|^2. \tag{4.3}$$

Since the last nonlinear term in (4.2), arising from the cubic equation of state for the density, cannot be controlled by means of the dissipative term  $D_0$ , we introduce the following additional energy:

$$V_1 = \frac{A}{4} \langle \theta^4 \rangle. \tag{4.4}$$

The time derivative of such energy along the solutions of (2.2) is:

$$\dot{V}_1 = -\frac{3}{4} \|\nabla \phi\|^2 - R \langle \theta^3 w \rangle, \tag{4.5}$$

with  $\phi = \theta^2$ . Therefore, setting

$$V = V_0 + V_1, \quad (4.6)$$

we obtain:

$$\dot{V} = RI_0 - D_0 - \frac{3}{4} \|\nabla\phi\|^2 - \langle h_1(z)\theta^2 w \rangle - \left(R + \frac{\varepsilon_3 a_2}{R}\right) \langle \theta^3 w \rangle. \quad (4.7)$$

By following the standard energy method, we define

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathcal{H}_0} \frac{I_0}{D_0}, \quad (4.8)$$

where  $\mathcal{H}_0$  is the space of admissible perturbations  $(\mathbf{u}, \theta, \psi)$  :

- i) regular in  $\Omega$ ,
- ii) periodic in  $x$  and  $y$ ,
- iii)  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,
- iv)  $D_0 < \infty$ .

By virtue of Rionero's theorem [15], the (4.8) exists, and then from (4.7) and (4.8) it turns out that:

$$\dot{V} \leq -D - \langle h_1(z)\theta^2 w \rangle - \left(R + \frac{\varepsilon_3 a_2}{R}\right) \langle \theta^3 w \rangle, \quad (4.9)$$

where

$$D = \left(\frac{R_E - R}{R_E}\right) D_0 - \frac{3}{4} \|\nabla\phi\|^2. \quad (4.10)$$

From now on we will assume that  $R < R_E$ , so that  $D \geq 0$ .

Now, by virtue of the Sobolev inequality:

$$\langle \theta^4 \rangle^{\frac{1}{4}} \leq c \|\nabla\theta\|, \quad (4.11)$$

the following inequalities holds:

$$\begin{aligned} \langle h_1(z)\theta^2 w \rangle &\leq h_1^* c \langle \theta^4 \rangle^{\frac{1}{4}} \|\nabla\theta\| \|\mathbf{u}\| \leq \left(\frac{4}{A}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{h_1^* c}{\alpha\sqrt{\lambda}} D V^{\frac{1}{4}}, \\ \langle \theta^3 w \rangle &\leq c \langle \theta^4 \rangle^{\frac{1}{4}} \|\nabla\phi\| \|\mathbf{u}\| \leq \left(\frac{4}{A}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{2c}{\sqrt{3\alpha}} D V^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

with

$$h_1^* = 3a_2(1 + |\xi|), \quad \alpha = (R_E - R)/R_E.$$

Therefore, from (4.9) and (4.12) it turns out that:

$$\dot{V} \leq -D \left\{ 1 - \left( \frac{4}{A} \right)^{\frac{1}{4}} c \left[ \frac{h_1^*}{\alpha\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{3\alpha}} \left( R + \frac{a_2}{R} \right) \right] V^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (4.13)$$

Finally, from (4.9) and the Poincarè inequality one obtains:

**Theorem 2.** If  $R < R_E$  and

$$V(0) < \frac{A}{4c^4} \left[ \frac{h_1^*}{\alpha\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{3\alpha}} \left( R + \frac{a_2}{R} \right) \right]^{-4},$$

then the solution  $m_0$  is nonlinearly asymptotically exponentially stable with respect to the norm (4.6), and there exists a positive constant  $\gamma$  such that for any time  $t$  the following inequality holds:

$$V(t) \leq V(0) \exp \left[ -\gamma \frac{R_E - R}{R_E} t \right]. \quad (4.14)$$

Now, we are interested about the variational problem (4.8). The Euler-Lagrange equations of (4.8) are:

$$\begin{aligned} 2\Delta w + R_{EL} [\lambda + h_2(z)] \Delta_1 \theta &= 0 \\ 2\lambda \Delta \theta - R_{EL} [\lambda + h_2(z)] w &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

In the case of the water, by using the compound matrix method and the golden section search [16], we solve the problem:

$$\max_{\lambda} \min_{a^2} R_E^2(a^2, \lambda),$$

and the numerical values obtained are listed in Table 2:

**Table 2 - Critical Rayleigh numbers of the conditional nonlinear stability in the case of water.**

$\Delta T$	$R_E^2$	$a^2$
1	45.26	9.89
2	52.73	9.92
3	62.81	10.03
4	76.71	10.24
5	96.34	10.78
6	123.97	11.94
7	161.17	14.13

### 5 Global nonlinear stability

The aim of this section, is to obtain a nonlinear global stability result, about the motionless state  $m_0$ , by using the Lyapunov direct method.

To this end, let us introduce the weighted energy functional:

$$V = A \left[ \frac{\lambda}{2} \langle \theta^2 \rangle + \frac{1}{3R} \langle g(z) \theta^3 \rangle + \frac{\mu}{4R^2} \langle \theta^4 \rangle \right], \quad (5.1)$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are positive coupling parameters to be selected, while  $g(z)$  is a linear function in  $z$  to be chosen suitably later. Of course,  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $g(z)$  have to be chosen in such a way that  $V(t)$  is positive definite. From (2.2), taking into account the boundary conditions (2.4), it follows that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{A\lambda}{2} \langle \theta^2 \rangle \right] &= -\lambda \|\nabla\theta\|^2 - \lambda R \langle \theta w \rangle, \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{A}{3R} \langle g(z) \theta^3 \rangle \right] &= -\frac{1}{R} \langle g(z) \nabla\theta \cdot \nabla\theta^2 \rangle - \langle g(z) \theta^2 w \rangle + \frac{1}{3R} \langle g'(z) \theta^3 w \rangle, \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{A\mu}{4R^2} \langle \theta^4 \rangle \right] &= -\frac{3\mu}{4R^2} \|\nabla\theta^2\|^2 - \frac{\mu}{R} \langle \theta^3 w \rangle, \\ -\|\mathbf{u}\|^2 - R \langle h_2(z) \theta w \rangle - \langle h_1(z) \theta^2 w \rangle - \frac{\varepsilon_3 a_2}{R} \langle \theta^3 w \rangle &= 0. \end{aligned}$$

From the above relations we get:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -R \left\{ \lambda \langle \theta w \rangle + \langle h_2(z) \theta w \rangle + \frac{1}{R} \langle g(z) \theta^2 w \rangle + \frac{1}{R} \langle h_1(z) \theta^2 w \rangle \right\} \\ & - \left\{ \| \mathbf{u} \|^2 + \lambda \| \nabla \theta \|^2 \right\} + \frac{1}{R} \langle g(z) \nabla \theta \cdot \nabla \theta^2 \rangle + \frac{3\mu}{4R^2} \| \nabla \theta^2 \|^2 \\ & + \frac{1}{3R} \left\{ \langle g'(z) \theta^3 w \rangle - 3(\mu + \varepsilon_3 a_2) \langle \theta^3 w \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

On choosing:

$$g(z) = 3(\mu + \varepsilon_3 a_2) z,$$

the last term in (5.2) vanishes. Further, setting

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\theta^2}{R}, \\ f_1(z) &= g(z) + h_1(z), \\ f_2(z) &= \lambda + h_2(z), \end{aligned} \quad (5.3)$$

from (5.2) it follows that:

$$\dot{V} = R\mathcal{I} - \mathcal{D}, \quad (5.4)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= - \langle f_2(z) \theta w \rangle - \langle f_1(z) \psi w \rangle, \\ \mathcal{D} &= \| \mathbf{u} \|^2 + \lambda \| \nabla \theta \|^2 + \langle g(z) \nabla \theta \cdot \nabla \psi \rangle + \frac{3}{4} \mu \| \nabla \psi \|^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Now for any  $\lambda$  such that:

$$\lambda > \lambda^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{if } \varepsilon_3 = -1 \\ 12 a_2 & \text{if } \varepsilon_3 = 1, \end{cases}$$

and choosing:

$$\mu = \frac{\lambda - 6\varepsilon_3 a_2}{6} (> 0),$$

it is easily seen that:

$$V \geq 0, \quad \mathcal{D} \geq 0.$$

By following the standard energy method, we define:

$$\frac{1}{R_w} = \max_{\mathcal{H}} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}, \quad (5.6)$$

where  $\mathcal{H}$  is the space of admissible perturbations  $(\mathbf{u}, \theta, \psi)$ :

- i) regular in  $\Omega$ ,
- ii) periodic in  $x$  and  $y$ ,
- iii)  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,
- iv)  $\mathcal{D} < \infty$ .
- v)  $\theta^2 = R\psi$ ,

By means of Poincaré inequality, there exists a positive constant  $h$  such that  $hV \leq \mathcal{D}$ , then from (5.4) and (5.6) it follows:

**Theorem 3.** If  $R < R_w$  then the basic motion is asymptotically exponentially stable with respect to the weighted norm (5.1), and for any time  $t$  the following inequality holds:

$$V(t) \leq V(0) \exp \left[ -h \frac{R_w - R}{R_w} t \right]. \quad (5.7)$$

### 6 The variational problem

Let us consider the following variational problem:

$$\frac{1}{R^*} = \max_{\mathcal{H}^*} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}, \quad (6.1)$$

where  $\mathcal{H}^*$  is defined by i),..., iv) of the previous section, and hence  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^*$ . Comparing (5.6) and (6.1) we can conclude that:

$$R^* \leq R_w.$$

So, if we assume  $R < R^*$  then the Theorem 3 holds. The Euler-Lagrange equations of the variational problem (6.1) are:

$$\begin{aligned} 2u_i + R^* [f_2(z)\theta + f_1(z)\psi] \delta_{i3} &= \pi_{,i} \\ 2\lambda\Delta\theta + \frac{\lambda}{2}z\Delta\psi + \frac{\lambda}{2}\psi_{,z} - R^*f_2(z)w &= 0 \\ \frac{\lambda}{2}z\Delta\theta + \frac{3\mu}{2}\Delta\psi + \frac{\lambda}{2}\theta_{,z} - R^*f_1(z)w &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

where  $\pi$  is a Lagrange multiplier. On considering normal modes perturbations it turns out:

$$\begin{aligned} D^2W &= a^2W + \frac{1}{2}R^*a^2 [f_2(z)\Theta + f_1(z)\Psi] \\ D^2\Theta &= \frac{\lambda z}{\gamma(z)}D\Theta - \frac{3\mu}{\gamma(z)}D\Psi + R^*\frac{6\mu f_2(z) - 4\lambda z f_1(z)}{\lambda\gamma(z)}W + a^2\Theta \\ D^2\Psi &= -\frac{4\lambda}{\gamma(z)}D\Theta + \frac{\lambda z}{\gamma(z)}D\Psi + R^*\frac{8f_1(z) - 2z f_2(z)}{\gamma(z)}W + a^2\Psi, \end{aligned} \quad (6.3)$$

with

$$\gamma(z) = 12\mu - \lambda z^2 (> 0).$$

By using the compound matrix method and the golden section search [16], in the case of the water we found the numerical values listed in Table 3.

**Table 3 - Critical Rayleigh numbers of the nonlinear stability with respect to the weighted norm  $V$  in the case of water.**

$\Delta T$	$R^{*2}$	$a^2$
1	43.41	9.80
2	45.40	9.80
3	45.48	9.83
4	44.36	9.89
5	42.63	9.94
6	40.65	9.97
7	38.63	10.06

### Appendix

Let us observe that the (3.1) can be written in the following general form:

$$B\mathbf{U}_t = \mathcal{L}\mathbf{U}, \tag{A.1}$$

where

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ \pi \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\partial_y \\ 0 & 0 & -1 & -R h_2(z) & -\partial_z \\ 0 & 0 & -R & \Delta & 0 \\ -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Then, accounting for (A.3), it can be easily seen that the linear operator  $\mathcal{L}$ , owing to the nonlinear equation of state for density (1.1), is skewsymmetric with respect to the  $L^2$ -scalar product.

**Acknowledgements** - This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of wave propagation and stability in continuous media".

## References

- [1] Azouni, M.A.: Hysteresis loop in water between 0°C and 4°C. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **24**, 137-142 (1983).
- [2] Azouni, M.A., Normand, C.: Thermoconvective instabilities in a vertical cylinder of water with maximum density effects. I. Experiments. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **23**, 209-222 (1983).
- [3] Azouni, M.A., Normand, C.: Thermoconvective instabilities in a vertical cylinder of water with maximum density effects. I. Experiments. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **23**, 223-245 (1983).
- [4] Barenblatt, G.I., Entov, V.M., Ryzhik, V.M.: *Theory of fluid flows through natural rocks*. Kluwer Academic Publishers 1990.
- [5] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. New York: Dover 1961.
- [6] Flavin, J., Rionero, S.: *Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction*. Boca Raton, Florida: CRC Press 1996.
- [7] George, J.H., Gunn, R.D., Straughan, B.: Patterned ground formation and penetrative convection in porous media. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **46**, 135-158 (1989).
- [8] Inaba, H., Fukuda, T.: Natural convection in an inclined square cavity in regions of density inversion of water. *J. Fluid Mech.* **142**, 363-381 (1984).
- [9] McKay, G., Straughan, B.: Nonlinear energy stability and convection near the density maximum. *Acta Mechanica* **95**, 9-28 (1992)
- [10] Merker, G. P., Waas, P., Grigull, U.: Onset of convection in a horizontal water layer with maximum density effects, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 505-515 (1979).
- [11] Nield, D.A., Bejan, A.: *Convection in porous media*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1992.
- [12] Payne, L. E., Straughan, B.: Unconditional nonlinear stability in penetrative convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 57-63 (1987).
- [13] Payne, L. E., Straughan, B.: Structural stability for the Darcy equations of flow in porous media. *Proc. R. Soc. Lond A* **454**, 1691-1698(1998).

- [14] Qin, Y., Chadam, J.: Nonlinear convective stability in a porous medium. *Studies In Appl. Math.* 273-288 (1996).
- [15] Rionero, S.: Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica. *Ann. Mat. Pura Appl.* **78**, 339-364 (1968).
- [16] Straughan, B.: *The energy method, stability and nonlinear convection.* Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer 1992.
- [17] Straughan, B.: *Mathematical aspects of penetrative convection.* In *Pitman research notes in mathematics*, vol.288. Harlow: Longman 1993.
- [18] Veronis, G.: Penetrative convection. *Astrophys. J.* **137**, 641-663(1963).
- [19] Walden, R.W., Ahlers, G.: Non-Boussinesq and penetrative convection in a cylindrical cell. *J. Fluid Mech.* **109**, 89-114 (1981).

## **Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota II. Malte e calcestruzzi con addizione di ceneri di pula di riso.**

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 3 giugno 2000)

**Riassunto.** Dopo aver sottolineato l'interesse dell'utilizzazione, quali prodotti di parziale rimpiazzo del cemento Portland, di residui minerali di coltivazioni agrarie di appropriata composizione, si esaminano le caratteristiche del cemento composito preparato con addizione di ceneri di pula di riso.

**Summary.** The utilization as replacement materials for blended cements, of mineral wastes of agricultural cultivation of suitable composition, is emphasized. Behaviour characteristics of the cement prepared with addition of rice husk ash are examined and effects discussed.

**Parole chiave:** Ceneri di pula di riso; cementi compositi; aggiunte minerali.

**Key words:** Rice husk ash; blended cements; mineral admixtures.

Nella Nota I (1) è stato compiutamente sottolineato l'interesse odierno della produzione di cementi compositi, ponendo in risalto alcuni favorevoli aspetti del loro impiego, unitamente ai benefici determinati dalla possibilità di collocazione di prodotti di risulta, nonché dalla riduzione dei costi per unità di volume di prodotto finito.

La crescente disponibilità e la costituzione chimica di alcuni sottoprodotti industriali, spingono oggi ad ampliare la famiglia delle aggiunte minerali per cementi compositi, e non è difficile prevedere che tale ampliamento proseguirà nel tempo, poiché, grazie all'avanzamento delle tecnologie di produzione e di lavorazione, prodotti tuttora di limitato interesse, potranno costituire, nel prossimo futuro, aggiunte minerali di rispondenti caratteristiche.

In aree rurali di Paesi in via di sviluppo, il gran numero di residui di coltivazioni agrarie sembrano infatti ottimi candidati quali prodotti di rimpiazzo parziale del cemento Portland. Fra tali residui, un posto di eccellenza già oggi spetta alle ceneri di pula di riso, benché anche altri sottoprodotti si rivelino altrettan-

to promettenti. In Turchia, ad esempio, la paglia di grano rappresenta fin d'ora un interessante prodotto di risulta (2).

E' opportuno a questo punto osservare che una tonnellata di riso produce all'incirca 200 kg di pula (3). Tenuto conto che la produzione mondiale di riso supera i 500 milioni di tonnellate/anno (4), al fine di smaltire un rifiuto non poco ingombrante come la pula, il suo primo utilizzo è stato quello di combustibile. Fornisce infatti circa 14 MJ/kg; pertanto una tonnellata di pula equivale a 0.48 tonnellate di carbone o 0.36 tonnellate di nafta (5).

Nelle aree rurali di Paesi ad alta produzione di riso (Cina, India), sotto la spinta della difficoltà di approvvigionamento di cemento Portland, e, conseguentemente dell'alto costo, alla fine degli anni '70 è stata proposta l'utilizzazione della pula, debitamente incenerita, come fonte di prodotto ad attività "pozzolanica".

A seguito di distruzione della materia organica, essa lascia infatti un residuo ricchissimo di silice amorfa, ad altissima superficie specifica, che, per la massima parte, conserva la microstruttura del prodotto madre (Fig. 1), nonché caratteristiche di comportamento assai prossime, e talvolta anche superiori in fatto di "pozzolanicità" (6) a quelle del fumo di silice.

Poiché le condizioni dell'incenerimento sono determinanti ai fini della manifestazione di "pozzolanicità" (7), è ovvio che il processo debba esser condotto con modalità appropriate, a temperatura che non ecceda i 600°C, al fine di impedire la conversione della silice amorfa in una forma cristallina (quarzo, tridimite o cristobalite, a seconda della temperatura e durata del trattamento).

Questa è la ragione che impedisce la manifestazione di "pozzolanicità" alle ceneri di pula impiegata come combustibile nei forni industriali. Se il processo d'incenerimento venisse poi condotto a temperatura troppo bassa, la maggiore quota di residuo carbonioso ne ridurrebbe la reattività, con conseguenti ripercussioni negative sul tempo di presa del legante e sulle caratteristiche di resistenza meccanica del manufatto.

E' stato posto in luce che l'incenerimento in letto fluido (8) genera una cenere ad alto contenuto di silice amorfa, con ampia superficie specifica, altamente reattiva con la calce proveniente dall'idratazione del cemento Portland a temperatura ambiente e pertanto pienamente idonea quale prodotto di parziale rimpiazzo.

Il tenore di silice delle ceneri si aggira intorno al 90% in massa; quello di residuo carbonioso intorno al 1-5%. Sono altresì presenti: tracce di cristobalite e tridimite, alcali, tracce di ferro, alluminio, ossidi di calcio e di magnesio, così come tracce di elementi somministrati al terreno sotto forma di fertilizzanti. Il peso specifico apparente è prossimo a 2290 kg/m<sup>3</sup>.

Il processo d'incenerimento di 200 kg di pula genera all'incirca 40 Kg di ceneri. In Paesi ad alta produzione di riso (Cina, India), la disponibilità potenziale di ceneri è pertanto piuttosto elevata.

Per valutare l'attività "pozzolanica" di tali ceneri, è stato proposto il rilevamento dell'indice di attività della silice (9) come spia del suo stato amorfo,

anche se, non sempre, si registra poi una relazione diretta con il contributo potenziale all'insorgere della resistenza meccanica.

La quantità di silice che passa in soluzione per trattamento di un campione di ceneri passante al setaccio di 325 maglie, con una soluzione bollente 0.5 N di NaOH, per un tempo determinato, può dare un'indicazione di massima sul contenuto di specie amorfa.

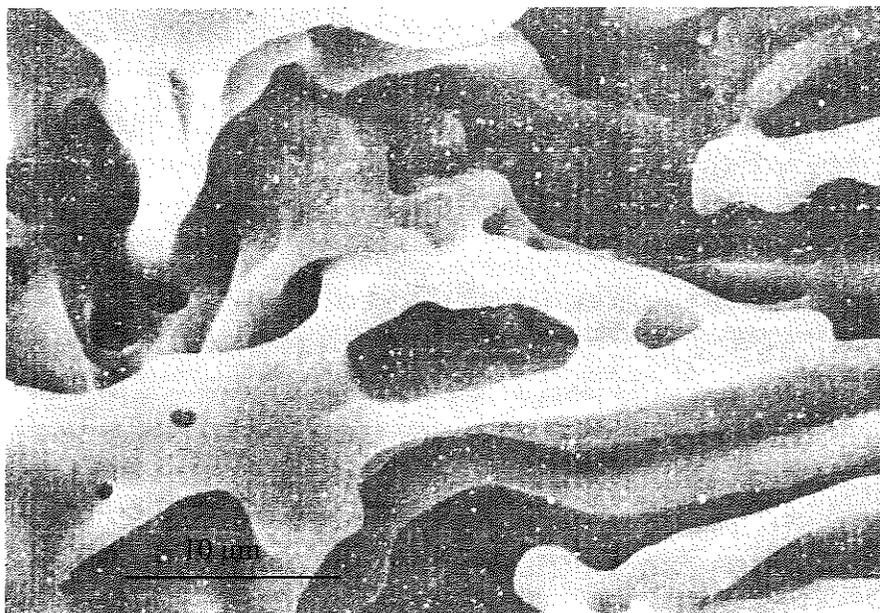


Figura 1 – Micrografia SEM di ceneri di pula di riso.

Si può altresì far ricorso alla metodologia proposta con la prova di “pozzolanicità” per cementi pozzolanici ISO R 836. Non mancano poi valutazioni basate su prove di resistenza meccanica o sull'abbassamento di conduttività elettrica di una soluzione satura di  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ , alla quale si aggiungono 5 gr di ceneri, per temperatura e durata di tempo determinate (10). È stato sviluppato infine un metodo di misura basato sulla determinazione della cinetica di reazione delle ceneri con un silicato tricalcico di sintesi (11).

Le ceneri amorphe di pula di riso trovano impiego nella preparazione di malte calce/ceneri, di cementi compositi Portland/ceneri, di calcestruzzi all'atto della loro confezione.

Dal punto di vista della resistenza meccanica, il rapporto ottimale calce/ceneri è prossimo ad 1:2.

Una ricerca condotta alla temperatura di  $40^\circ\text{C}$  ed in presenza d'acqua (12) ha permesso di rilevare che le ceneri di pula reagiscono con l'idrossido di calcio

in soluzione per formare un tipo di gelo corrispondente a  $\text{Ca}_{1.5} \text{SiO}_2 \cdot 3.5 \cdot x\text{H}_2\text{O}$ . Tale gelo si presenta con un aspetto fioccoso, con struttura porosa ed ampia superficie specifica. Il diametro medio del prodotto di reazione, compreso fra 4.8-7.9 micron, varia leggermente con le condizioni di reazione. Per riscaldamento, esso perde gradualmente acqua, conservando lo stato amorfo fino a  $750^\circ\text{C}$ . Più sopra incomincia a trasformarsi in wollastonite cristallina ( $\text{CaSiO}_3$ ).

La presenza di ceneri di pula in seno al cemento Portland si traduce in un aumento della neoformazione di silicato di calcio idrato (C-S-H (I)), rispetto al cemento Portland ordinario, per effetto appunto di una pronta reazione della silice amorfa delle ceneri con la calce d'idratazione del cemento. Il meccanismo d'idratazione del sistema si svolge con la dissoluzione di ioni silicio e successiva loro combinazione con la calce, per formare un gelo sciolto. Diminuisce la neoformazione di monosolfato, mentre quella di ettringite non sembra influenzata. Pertanto, l'aggiunta di ceneri di pula, di appropriata finezza, al cemento Portland, non solo ne incrementa la resistenza meccanica (grazie alla maggiore formazione di silicato di calcio idrato), ma anche quella all'attacco acido, alla carbonatazione, alla penetrazione di ioni  $\text{Cl}^-$ , allo scorrimento viscoso, in virtù di una riduzione delle dimensioni dei pori, particolarmente di quelli con raggio superiore a  $200 \text{ \AA}$  (8), a vantaggio del numero di pori più piccoli. I grandi pori permeabili cedono il passo a pori più piccoli, impermeabili. Una frazione di aghi di ettringite e di cristalli laminari di  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  si raccolgono a caso nelle zone di confine, sicché la resistenza si sviluppa più compiutamente(13).

In miscele ternarie ceneri volanti-fumo di silice-ceneri di pula di riso, a livelli di sostituzione del cemento compresi fra 10 e 50%, è stato anche riscontrato un effetto sinergico sull'affinamento dei pori.

Nel caso di impasti cementizi, la richiesta d'acqua per raggiungere una determinata consistenza cresce, come sempre (1), al crescere del contenuto di aggiunta attiva. Il rimpiazzo ottimale di cemento Portland con ceneri di pula di riso non supera il 20-30% in massa.

### ***Conclusioni.***

In aree rurali, particolarmente di Paesi in via di sviluppo, i residui minerali di coltivazioni agrarie di adeguata composizione e finezza, si rivelano una fonte interessante di approvvigionamento di aggiunte attive per cementi compositi.

In Paesi ad alta produzione di riso (Cina, India), la pula, convenientemente incenerita, con il suo alto contenuto di silice amorfa (90%) può costituire una aggiunta "pozzolanica" di caratteristiche di comportamento almeno pari a quelle del fumo di silice.

L'aggiunta di ceneri di pula di riso al cemento Portland od al calcestruzzo, favorisce infatti la neoformazione di una maggiore quantità di silicato di calcio

idrato, grazie all'alta attività "pozzolanica" ed alla conseguente, pronta reazione con l'idrossido di calcio proveniente dall'idratazione dei silicati anidri, con incremento della resistenza meccanica.

L'influenza esercitata sulla distribuzione delle dimensioni dei pori, con conseguente loro affinamento, si traduce in una migliore resistenza del manufatto all'attacco acido, alla carbonatazione, alla penetrazione degli ioni aggressivi.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota I. Malte e calcestruzzi con addizione di fumo di silice condensato. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (in corso di stampa)
- (2) Biricik H., Akoz F., Berkay I., Tugar A.N. Study of pozzolanic properties of wheat straw ash. *Cem. Concr. Res.*,29,5,637(1999).
- (3) Bureau of Agricultural Economics. Situation and outlook 1983-Rice,Australia Gov.,Publ. Service Camberra 1 -10 (1983).
- (4) La Piccola Treccani. *Ist. Enclic. Ital.* X,311 (1996).
- (5) Swamy R.N. Cement replacement materials,3. Surrey Univ. Press,London,173 (1986).
- (6) Taylor H.V.F. Cement chemistry. Acad. Press, Ltd.,London,311 (1990).
- (7) Sugita S., Yu Q., Shoya mmm,Tsukinaga Y.,Isojima Y. On the semi-industrial production of highly reactive rice husk ash and its effect on cement and concrete properties. *Proc. 10th Int. Congr. Chem. Cement 3*, ii109. Gothenburg (1997).
- (8) Hara N., Noma H., Honma S.,Samrejprasong S., Uparisajkul S. Suitability of rice husk ash obtained by fluidized-bed combustion for blended cement. *9th Int. Congr. Chem. Cement,III,Nat. Council Cem., Build. Mat, New Dehli*,72 (1992).
- (9) Shah R.A.S. Large scale production of rice-husk cement problems and remedies. *Proc. UNIDO/ESCAP/RCTT Follow-up meeting on rice-husk ash cement. Alor Setar,Malaysia* (1979)
- (10) Luxan M.P.,Madruga F.,Saavedra J. Rapid evaluation of pozzolanic activity of natural products by conductivity measurement. *Cem. Con cr. Res.*,19,1,63 (1988).
- (11) Vernet C., Noworyta G. Reactivity test for fine silicas and pozzolanic mineral additives. *Proc. 9th Int. Congr. Chem. Cement,III,79*,New Dehli (1992).
- (12) Yu Q., Sawayama K,Sugita S.,Shoya M.,Isojima Y. The reaction between rice husk ash and  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  solution and the nature of its product. *Cem. Concr. Res.*,29,1,37(1999).
- (13) Lin L.K., Hwang C.L. Characteristics and hydration mechanism of RHA cement paste. *Proc. 10th Int. Congr. Chem. Cement,3,ii108*. Gothenburg (1997).
- (14) Isaia G.C. Synergic action of fly ash in ternary mixtures with silica fume and rice husk ash. *Proc 10th Int. Congr. Chem. Cement,3,ii110*. Gothenburg (1997).



## **Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota III. Malte e calcestruzzi con addizione di FILLER calcareo.**

Nota di Riccardo SERSALE

(Adunanza del di 11 Novembre 2000)

*Riassunto.* Vengono presi in esame gli aspetti essenziali dell'impiego di calcare macinato quale prodotto supplementare per la produzione di cementi compositi. Si approfondiscono: - l'interazione del calcare con il clinker di Portland nel corso del processo d'idratazione; - gli effetti indotti dalla presenza del calcare sul comportamento meccanico e chimico del risultante cemento; - il complesso delle modalità operative che consentono la produzione di cementi compositi con proprietà quanto più prossime a quelle del cemento Portland integro.

*Parole chiave:* Cementi al calcare; prodotti supplementari per cementi compositi; filler.

*Summary.* The main aspects of limestone utilization as addition for Portland-composite-cements, are examined. The interaction between limestone filler and Portland clinker during hydration process - the effects of limestone addition on the mechanical and chemical behaviour of the resultant cement; - the whole of the instructions for preparing Portland-limestone-cements similar in properties to those of plain Portland, are investigated.

*Key words:* Limestone cement; supplementary cementing materials; filler.

In due precedenti Note sono stati esaminati i più recenti sviluppi dell'utilizzazione del fumo di silice (1) e delle ceneri di pula di riso (2), quali prodotti supplementari per la produzione di cementi compositi.

Questa Nota è invece dedicata all'approfondimento degli effetti dell'impiego di calcare finemente macinato, sempre quale prodotto supplementare.

Per lungo tempo si è ritenuto che il calcare finemente macinato - a differenza dei prodotti ad attività "pozzolanica" (vere pozzolane, ceneri volanti, fumo di silice, ceneri di pula di riso, ecc.) o di quelli con proprietà idrauliche latenti (scorie d'alto forno granulate) - fosse soltanto un'aggiunta adulterante.

A partire, però, dal 1980, gli studi effettuati, particolarmente in Francia (3), hanno corretto questa opinione, tanto che oggi la Norma UNI ENV 197-1

(4) - la versione italiana, cioè, della Norma europea CEN ENV 197-1 - classifica come cementi Portland al calcare, due tipi di cementi comuni (II A-L e II B-L), che recano rispettivamente 80-94% di clinker in massa (6-20% di calcare) e 65-79 % di clinker in massa (21-35 % di calcare), idonei ad esser impiegati in condizioni ambientali ordinarie.

In presenza d'acqua si riconosce pertanto al calcare finemente macinato anche un'azione chimica sul clinker ed ai corrispondenti cementi compositi si attribuiscono benefici effetti tecnici ed economici (5), tanto che oggi l'impiego di calcare quale aggiunta al clinker è notevolmente cresciuto.

Sembra perciò interessante approfondire alcuni aspetti essenziali dell'impiego di calcare per la produzione di cementi compositi.

Il primo attiene all'interazione del calcare con il clinker, nel corso del processo d'idratazione.

Il secondo, agli effetti indotti dalla presenza del calcare sul comportamento meccanico e chimico del risultante cemento.

Il terzo, al complesso delle condizioni operative che possono favorire la produzione di un cemento composito con proprietà quanto più prossime a quelle del Portland integro

Con riferimento al primo aspetto, si ritiene che il calcare giuochi un duplice ruolo: fisico e chimico. In virtù della finezza, il calcare può agire come filler, interponendosi fra i grani di clin ker ed aumentando la compattezza del manufatto. Allo stesso tempo, reagisce, però, con le fasi alluminato del clinker e, in questo contesto, si determina una competizione con il gesso, nella direzione della neoformazione di carboalluminato di calcio idrato(C<sub>4</sub> AC H<sub>11</sub>).

A favore di un'attività anche chimica (3) stanno:

- la scomparsa di un'aliquota di calcite, rilevata mediante analisi differenziale;
- la neoformazione di carboalluminato di calcio idrato;
- l'accelerazione del processo d'idratazione dell'alluminato tricalcico e del silicato tricalcico ( o dell'alluminato monocalcico dei cementi alluminosi);
- la modificazione del silicato di calcio idrato (C-S-H);
- la formazione di un'aureola di transizione fra filler e pasta di cemento;
- la già sottolineata competizione fra calcite e gesso, nel corso dell'idratazione dell'alluminato tricalcico.

La calcite reagisce infatti con le fasi alluminato e ferrito del clinker, determinando anche una modifica delle fasi AFm (alluminato-ferrito monosostituito) e AFt (6).

Nel corso del processo d'idratazione, gli ioni carbonato provenienti dal filler calcareo, oltre alla neoformazione di monocarboalluminato, possono promuovere anche quelle di monosolfato e di ettringite, proprio in virtù di quella competizione che si stabilisce fra calcite e gesso.

Recenti ricerche (6b) avanzano l'ipotesi che si formi preferibilmente monocarboalluminato di calcio in luogo di monosolfato anche alle brevi stagionature e che la trasformazione di ettringite in monosolfato risulti ritardata.

E' stato altresì rilevato che all'incirca il 5% in peso di calcare rimane disponibile per la reazione, dopo 120 giorni di idratazione di malte preparate con cemento al calcare, al 15% di quest'ultimo. (7).

Con riferimento agli effetti indotti dall'addizione di calcare al clinker, tale addizione può esercitare una pluralità di funzioni, oltre a quella connessa al processo d'idratazione:

- completamento della curva granulometrica di un cemento a scarso contenuto di grani fini;
- ostruzione dei pori capillari, con conseguente ostacolo alla percolazione dell'acqua;
- modificazione dei parametri reologici degli impasti.

Ricerche sulle proprietà reologiche e sull'attitudine alla ritenzione d'acqua, di cementi contenenti fino al 15% di calcite, hanno posto in luce (8) che le variazioni del carico di snervamento e la viscosità plastica, testimoniano del potere lubrificante della frazione di particelle inferiori a 10 micron, favorita dalla maggiore macinabilità del calcare rispetto al clinker, senza apprezzabili variazioni del valore di ritenzione d'acqua.

I cementi compositi, preparati con calcari poveri di minerali delle argille e di sostanze organiche, nonostante la finezza più spinta, hanno generalmente un effetto positivo sulla richiesta d'acqua. Richiedono infatti un minor quantitativo d'acqua d'impasto, rispetto al cemento Portland integro, probabilmente per effetto della differente distribuzione delle dimensioni delle particelle. Tempo di presa e qualità sono soddisfacenti e simili a quelli osservati per il Portland.

L'espansione lineare delle malte di cemento al calcare si rivela inoltre ben più piccola di quella del corrispondente cemento Portland, a qualunque stagionatura.

Una certa differenza di opinioni permane tuttora in riguardo agli effetti indotti dal quantitativo di calcare addizionabile, specie se superiore al 10%, sul comportamento meccanico del risultante cemento. Tale divergenza di opinioni risulta probabilmente esaltata da una pluralità di fattori:

- le caratteristiche composizionali e mineralogiche del clinker e del calcare impiegati (calcite a reticolo distorto);
- il tenore di calcite addizionato;
- la finezza di macinazione di entrambi i costituenti;
- le modalità stesse di miscela (macinazione frammista delle due specie), modalità che, a seguito della minor durezza, rende il calcare considerevolmente più fine;
- il fatto che le ricerche sul comportamento meccanico e sul processo d'idratazione, vengono spesso espletate addizionando alla calcite le fasi pure di costituzione del clinker (9).

Lo sviluppo della resistenza meccanica viene favorito infatti dalla concomitanza di più parametri: caratteristiche del clinker e del calcare; finezza di macinazione di entrambi, anche se non si può escludere che le proprietà ultime degli impasti risultano favorite da una combinazione ottimale delle due specie chimiche, e non soltanto dalle loro caratteristiche individuali.

E' stato rilevato che un cemento contenente fino al 10% di calcare e di finezza spinta ad un valore limite, sviluppa all'incirca la medesima resistenza a compressione del corrispondente Portland integro (9).

Un contenuto più alto di particelle fini nella miscela, amplia la distribuzione delle dimensioni delle particelle, rispetto al cemento Portland integro, riducendo, come già sottolineato, la richiesta d'acqua e migliorando la consistenza del calcestruzzo.

Al filler viene soltanto attribuita una tenue azione inerte (10) ribadendo che una finezza più spinta della frazione clinker, può contrastare la riduzione di resistenza meccanica addebitabile all'effetto diluente del calcare e che un calcestruzzo preparato con un cemento al 20% di calcite, con oltre il 75% in massa di un clinker di appropriate caratteristiche chimiche e mineralogiche può raggiungere il medesimo valore di resistenza meccanica di un Portland della medesima classe, con resistenza al gelo sufficientemente alta (10).

E' stato anche rilevato che l'aggiunzione di carbonato contribuisce allo sviluppo della resistenza a compressione dei calcestruzzi stagionati a temperatura, grazie, anche questa volta, all'effetto di accelerazione dell'idratazione dell'alite e delle fasi alluminato, senza effetti nocivi sull'espansione lineare e sulla resistenza al gelo (11).

Le proprietà meccaniche ( resistenza a compressione, a trazione, e modulo di elasticità ) dei calcestruzzi preparati con cementi al calcare sembrano poi meno influenzate dall'interruzione della stagionatura ad umido alle brevi scadenze (12). Ciò viene attribuito all'accelerazione del processo d'idratazione delle particelle di clinker, particolarmente del silicato tricalcico ed all'accresciuta finezza delle particelle di clinker, migliorando, di conseguenza, la resistenza alle brevi stagionature.

E' stato anche riscontrato (7) che l'aggiunzione di calcare incrementa notevolmente la porosità totale di malte preparate con cemento composito al 15% di aggiunta. Se però il calcare viene addizionato unitamente a microsilice in tenore fino all'8%, la porosità decresce. Un tenore superiore all'8%, provoca di nuovo un aumento della porosità. La malta che reca l'8% di microsilice esibisce la resistenza a compressione più alta, la porosità totale più bassa ed una distribuzione delle dimensioni dei pori discontinua. Il tenore di calcare incorporato dipende dal quantitativo di microsilice. Se quest'ultimo raggiunge il 15%, la corrispondente diminuzione della frazione cemento comporta una riduzione dell'idrossido di calcio disponibile per lo sviluppo dell'attività chimica del calcare, il quale, in tal caso, agisce unicamente da filler.

La resistenza meccanica, com'è noto, decresce al crescere della porosità e del diametro medio dei pori, ma, secondo alcuni sperimentatori (7b), l'entità di

tale decremento si rivelerebbe più facilmente collegabile all'addizione di scoria d'alto forno o di cenere volante, di quanto non si registri per addizione di calcare. Una simile affermazione indurrebbe a ritenere che porosità e diametro medio dei pori non siano significativamente influenzati da addizione di calcare.

Composizione e reattività del clinker, contenuto di alite e di alluminato, influenzano contenuto e ruolo del filler. La plasticità delle miscele risulta generalmente migliorata (10).

E' stato postulato che il cemento Portland ad alto contenuto di alluminato (tipo III ASTM), può reagire rapidamente con il carbonato nel corso dell'idratazione, neoformando significative quantità di carboalluminato di calcio idrato, con effetti benefici sullo sviluppo della resistenza meccanica e sull'attacco solfatico. Con cementi Portland a contenuto normale di alluminato (tipo II ASTM, max 8%), le reazioni possono risultare più lente e più protratte, a seguito di un'azione diluente dell'inerte calcareo, con possibile compromissione del risultato finale (13).

Per quanto attiene alla resistenza chimica e, in particolare, a quella all'attacco solfatico, malte di cemento contenenti il 15% in massa di calcare, hanno denunciato un comportamento pressochè simile a quello del cemento Portland (14), anche se il decorso dell'attacco risulta diverso.

Malte di cemento Portland immerse in soluzioni solfatiche per 12 mesi alla temperatura di 5° C, hanno posto in luce la neoformazione di ettringite responsabile del degrado, laddove quelle di cemento al calcare hanno mostrato anche la thaumasite (14).

E' stato rilevato che la neoformazione di carboalluminato migliora la resistenza ai solfati e le proprietà meccaniche delle paste di cemento indurite (15).

Il miglioramento della resistenza ai solfati per parte del monocarboalluminato è stato, però, confutato (16) ed espressa opinione che il monocarboalluminato sia invece una fase instabile in ambiente solfatico.

Per quanto attiene al terzo aspetto: la definizione del complesso delle condizioni che favoriscono la produzione di cementi al calcare con caratteristiche di comportamento quanto più prossime a quelle dei cementi Portland integri, appare verosimile che, scegliendo appropriatamente qualità del clinker e del calcare, percentuale di aggiunta e finezza di macinazione, è possibile conseguire l'obiettivo indicato (17).

E' raccomandabile una macinazione frammista di clinker e di calcare e, giocando sulla finezza del clinker (da circa 3000 a 4000 cm<sup>2</sup>/g.), è possibile preparare differenti cementi.

E' altresì raccomandabile una caratterizzazione chimica e mineralogica del calcare, prescegliendo calcari microcristallini più friabili e più facilmente macinabili, a tenore massimo di calcite e minimo di minerali delle argille che rechino non oltre il 0.5% di sostanze organiche.

La calcite a reticolo distorto sviluppa poi più rapidamente la resistenza meccanica, rispetto a quella di una calcite ben cristallizzata.

In conclusione, è ragionevole ritenere che una resistenza meccanica elevata sia il risultato di un'ottimizzazione della qualità del calcare, di quella del clinker, della finezza di macinazione e della compatibilità fra le due specie chimiche.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota I. Malte e calcestruzzi con addizione di fumo di silice condensato. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli (in corso di stampa).
- (2) Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota II. Malte e calcestruzzi con addizione di ceneri di pula di riso. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli (in corso di stampa).
- (3) Regourd M. Caracteristiques et activation des produits d'addition. 8° Congresso Internacional de Química do Cimento. I, 199. Rio de Janeiro (1986).
- (4) UNI ENV 197-I. Cementi comuni, composizione, specificazioni e criteri di conformità.
- (5) Baron J., Dourve C. Technical and economical aspects of the use of limestone filler additions in cement. World Cement, 18, 100 (1987).
- (6) Pera J., Husson S., Guilhot B. Influence of finely ground limestone on cement hydration. Cem. Concr. Composites, 21, 99, (1999).
- (6b) Kakali G., Tsivilis S., Aggeli E., Bati M. Hydration products of C3A, C3S and Portland cement in the presence of CaCO<sub>3</sub>. Cem. Concr. Research, 30, 1073 (2000).
- (7) Zelic J., Krstulovic R., Tkalcec E., Krolo P., The properties of Portland cement-limestone-silica fume mortars. Cem. Concr. Research, 30, 145, (2000).
- (7b) Pandey S. P., Sharma R.L. The influence of mineral additives on the strength and porosity of OPC mortars. Cem. Concr. Research, 30, 19 (2000).
- (8) Neto C.S., Campitelli V.C. The influence of limestone additions on rheological properties and water retention value of Portland cement slurries. Carbonate Additions to Cement. Klieger/Hooton Eds., ASTM STP 1064, 24. Philadelphia (1990).
- (9) Tsivilis S., Chaniotakis E., Badogiannis E., Pahoulas G., Ilias A. A study on the parameters affecting the properties of Portland limestone cements. Cem. Concr. Composites, 21, 107 (1999).
- (10) Sprung S., Siebel E. Beurteilung der Eignung von Kalkstein zur Herstellung von Portland Kalksteinzement. Zem-Kalk-Gips Int., 44, 1, 1 (1991).
- Narang K.C. Portland and blended cement. 9th Int. Congr. Chem. Cement, 1, 245, New Dehli (1992).
- (11) Sersale R. Advances in Portland and Blended cements. 9th Int. Congr. Chem Cement. 1, 277. New Dehli (1992).
- (12) Bonavetti V., Donza H., Rahhal V., Irassar E. Influence of initial curing on the properties of concrete containing limestone blended cement. Cem. Concr. Research, 30, 703 (2000).
- (13) Klemm W.A. Adams L.D. An investigation on the formation of carboaluminates. Carbonate Additions to Cement. Klieger/Hooton Eds., ASTM STP 1064, 60. Philadelphia (1990).
- (14) Barker A.P., Hobbs D.W. Performance of limestone cements in mortar prisms immersed in sulfate solution at 5°C. Cem. Concr. Composites, 21, 129 (1999).
- (15) Piasta W.G., Sawicz Z., Koprowski G., Owsiak Z. Influence of limestone powder filler on microstructure and mechanical properties of concrete under sulphate attack. 10th Int. Congr. Chem. Cement, 4iv O18. Goteborg (1997).

- (16) Irassar E. A discussion of the paper "Durability of the hydrated limestone-silica fume-Portland cement mortars under sulphate attack by Zelic J., Krstulovic R., Tkalcec E., Krolo P. Cem. Concr. Research, 30, 811 (2000).
- (17) Tsvilis S., Chaniotakis E., Kakali G., Batis G. Portland limestone cements: a global approach of their production, properties and use. Cem. Concr. Technology in the 2000 s, 173. Second Intern. Symposium, Sept. 2000, Istanbul.



## On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable

Nota di K. Peiffer\* e A. Ya Savchenko†

Presentata dal Socio Luigi Salvadori  
(Adunanza dell'11 novembre 2000)

We consider a system whose stabilization is partially assured by the quadratic terms of the equations of motion. We suppose that the linear part of the equations has a couple of purely imaginary eigenvalues, all other eigenvalues having strictly negative real parts. In that case, we show that the critical variables behave asymptotically as  $(Gt)^{-1/2}$  where  $G$  is a constant. As an example, we consider a simple pendulum which is passively stabilized by a spring, added to the pendulum and submitted to viscous friction.

### 1 Introduction

A passively stabilized system consists of an original system to which some dissipation elements are added in order to get asymptotic stability for the whole system. For instance, consider a simple oscillator formed by a bloc of mass  $M$  under the action of a spring and described by the equation

$$Mx'' = -Kx.$$

The equilibrium of this system is stable but not asymptotically stable. If we add a supplementary oscillator with viscous friction to the bloc, we get the

---

\*Inst. de Math. Pure et Appl., Chemin du Cyclotron, 2, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

†Inst. Prikl. Mat. Mekl., Ul. Rozi-Luxembourg 74, 340114 Donetsk-114, Ukraina

equations

$$\begin{aligned} Mx'' + m(x'' + z'') &= -Kx, \\ m(x'' + z'') &= -kz - hz' \end{aligned}$$

A criterion of Hurwitz shows that the eigenvalues of this linear system have all strictly negative real part. Thus all solutions tend exponentially to zero. In control theory, a similar process of stabilization is sometimes used for nonlinear systems in such a way that the eigenvalues of the corresponding linear system have all strictly negative real part (see for instance [3] p. 545, [2] pp 183) and, of course, in these cases again all solutions tend exponentially to zero.

In the present paper, we examine the asymptotic behaviour in a critical case. We suppose that the completed system is asymptotically stable but that its linear part still contains one couple of purely imaginary eigenvalues. Obviously, in this case we can not expect exponential decrease of the critical variables.

More precisely, we suppose that there exists a polynomial  $V$  of fourth degree which is a Liapunov function for the system and that the negative definiteness of  $V'$  is assured by its terms up to fourth degree. We show that the critical variables then asymptotically behave like  $(Gt)^{-1/2}$  where  $G$  is a suitable constant. We disregard the critical cases of one or two zero eigenvalues because then the technical construction of a Liapunov function is not the same as hereafter.

## 2 Notations and hypothesis

We consider the system

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda y + X(x, y, z), \\ y' &= \lambda x + Y(x, y, z), \\ z' &= Az + Z(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

where  $\lambda$  is a real constant;  $x, y, X$  and  $Y \in \mathbb{R}$ ;  $z$  and  $Z \in \mathbb{R}^n$  and  $A$  is a constant matrix of order  $n$ .

We suppose the following hypothesis are satisfied:

(H1)  $X, Y$  and  $Z$  are analytic functions whose expansions begin with terms at least of order 2 in  $(x, y, z)$  and satisfy

$$X(0, 0, z) = Y(0, 0, z) = 0. \quad (2)$$

(H2) The eigenvalues of  $A$  have all strictly negative real part.

If (H2) is satisfied, then, by a theorem of Liapounov (see for instance [4] p. 276 or [6] p.32), there exist a constant, symmetric, positive definite matrix  $B$  such that the quadratic form

$$W(z) = (Bz|z) \quad (3)$$

satisfies

$$(\text{grad } W(z)|Az) = -\|z\|^2, \quad (4)$$

$$\lambda_m \|z\|^2 \leq W(z) \leq \lambda_M \|z\|^2, \quad (5)$$

where the constants  $\lambda_m$  and  $\lambda_M$  denote respectively the minimum and maximum eigenvalues of  $B$ .

If hypotheses (H1) (H2) are satisfied, there exists a polynomial  $V$  of order 4 (cf. [5] or [4] p.361)

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + \mu W(z) + W^{(3)}(x, y, z) + W^{(4)}(x, y, z) \quad (6)$$

such that

$$V'(x, y, z) = -(G + \mu G_1)(x^2 + y^2)^2 - \mu \|z\|^2 + V^{(5)}(x, y, z) + \dots, \quad (7)$$

where  $\mu$  is an arbitrary real constant and  $W^{(k)}, V^{(k)}$  are forms of order  $k$ . Moreover (cf. [5]), the constants  $G$  and  $G_1$  are uniquely defined and depend only on  $X, Y, A$  and the second order terms of  $Z$ .

We finally suppose

(H3) The constant  $G$  in  $V'$  is strictly positive.

This means in reality that the original system

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda y + X(x, y, 0), \\ y' &= \lambda x + Y(x, y, 0) \end{aligned}$$

has been passively stabilized by the introduction of the supplementary control variables  $z$ . Indeed, for  $\mu > 0$ , the function  $V$  defined by (6) is positive definite and for  $\mu$  sufficiently small, its derivative (7) is negative definite. Thus the origin of (1) is asymptotically stable.

### 3 Several lemmas and main result

**Lemma 1** *If (H1) holds, then for any  $\varepsilon > 0$  small enough, there exists a constant*

$$a = a(\varepsilon) > 0 \text{ with } a(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0,$$

*such that for any solution  $(x(t), y(t), z(t))$  of (1)*

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \geq -a(x^2 + y^2) \quad (8)$$

*on*

$$B_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} : \|(x, y, z)\| \leq \varepsilon\}.$$

*Proof:* Because of (2), we can write

$$\begin{aligned} X(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} [xX_1^{(k)}(x, y, z) + yX_2^{(k)}(x, y, z)], \\ Y(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} [xY_1^{(k)}(x, y, z) + yY_2^{(k)}(x, y, z)], \end{aligned} \quad (9)$$

where  $X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}$  are forms of order  $k$ . Putting  $u(t) = x^2(t) + y^2(t)$  and derivating, we get by (1) and (9) that

$$\dot{u} = (2 \sum_{k=1}^{\infty} X_1^{(k)})x^2 + 2(\sum_{k=1}^{\infty} X_2^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_1^{(k)})xy + (2 \sum_{k=1}^{\infty} Y_2^{(k)})y^2. \quad (10)$$

Consider the right side of (10) as a quadratic form of  $x, y$ . As  $X$  and  $Y$  in (1) are analytical functions, the coefficients of this form are continuous functions vanishing at the origin. This achieves the proof.

**Lemma 2** *Let (H1) and (H2) hold and put*

$$w(t) = W(z(t))$$

*where  $(x(t), y(t), z(t))$  is a solution of (1). Then, there is a neighborhood*

$$B_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} : \|(x, y, z)\| \leq \varepsilon\}$$

*of the origin and there are constants  $f > 0, c = c(\varepsilon) > 0$  such that*

$$w' \leq -fW(z) + cW(z)^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/2} \quad (11)$$

*on  $B_\varepsilon$ . Moreover, we can choose*

$$c(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

*Proof:* Because of (H1), we can put

$$Z(x, y, z) = Z_0(x, y) + Z_1(x, y, z)$$

with  $Z_1(x, y, 0) = 0$ . Derivating  $w$ , we get by (1) and (4) that

$$w' = -\|z\|^2 + (\text{grad } W | Z_0) + (\text{grad } W | Z_1). \quad (12)$$

As the terms of  $Z_0$  are at least of second order, for some given  $\varepsilon > 0$ , there exists a constant  $c' = c'(\varepsilon) > 0$  with  $c'(\varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  such that

$$\|Z_0(x, y)\| \leq c'(x^2 + y^2)^{1/2} \quad (13)$$

on  $B_\varepsilon$ . On the other hand, as  $Z$  is analytic and  $Z_1(x, y, 0) = 0$ , there exists some constant  $d = d(\varepsilon) > 0$  with  $d(\varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  such that

$$\|Z_1(x, y, z)\| \leq d\|z\| \quad (14)$$

on  $B_\varepsilon$ . Moreover, there exists a constant  $k$ , independant of  $\varepsilon$ , such that

$$\|\text{grad } W(z)\| \leq k\|z\|.$$

Now equations (12) gives

$$w' \leq \|z\|^2 + kc'\|z\|(x^2 + y^2)^{1/2} + kd\|z\|^2$$

and, because of (5),

$$w' \leq -\lambda_M^{-1}W(z) + kc'\lambda_m^{-1/2}W(z)^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/2} + kd\lambda_m^{-1}W(z).$$

Thus, we finally get (11) with  $c(\varepsilon) = kc'(\varepsilon)\lambda_m^{-1/2} \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $f = \lambda_M^{-1} - kd(\varepsilon)\lambda_m^{-1} > 0$  for  $\varepsilon$  small enough.

**Lemma 3** *Let (H1) (H2) hold and suppose the origin of (1) is asymptotically stable. Then, for any  $\varepsilon > 0$ , there exist constants  $b > 0, \delta > 0$  and  $T > 0$  such that any solution  $(x(t), y(t), z(t))$  of system (1) with*

$$(x(0), y(0), z(0)) \in B_\delta, \quad (x(0), y(0)) \neq 0, \quad (15)$$

*satisfies*

$$\|z(t)\|^2 \leq b(x^2(t) + y^2(t)) \quad (16)$$

*for  $t \geq T$ . Moreover, the constant  $b = b(\varepsilon)$  can be chosen such that*

$$b(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

*Proof:* Let  $\varepsilon > 0$  small enough be given by lemmas 1 and 2. As system (1) is autonomous and asymptotically stable, the origin is uniformly asymptotically stable (cf. for instance [8], p.30). Thus, there exists some  $\delta > 0$  such that for any solution of (1),

$$(x(0), y(0), z(0)) \in B_\delta, t \geq 0 \Rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \in B_\varepsilon. \quad (17)$$

Moreover, for any  $\eta > 0$ , there exists some  $\sigma = \sigma(\delta, \eta) > 0$  such that

$$(x(0), y(0), z(0)) \in B_\delta, t \geq \sigma \Rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \in B_\eta. \quad (18)$$

Because of (2) and uniqueness of the solution of (1), the function

$$R(t) = [W(z(t)/u(t))]^{1/2}$$

with

$$u(t) = x^2(t) + y^2(t), \quad u(0) \neq 0,$$

is well defined on  $t > 0$ . Derivating  $R$  along (1), we get

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{w}} \left( \frac{w'}{u} - \frac{wu'}{u^2} \right). \quad (19)$$

This formula is valid as long as  $R(t) \neq 0$ . By (8) and (11), it leads to the estimate

$$R' \leq 1/2[c - (f - a)R], \quad (20)$$

with  $(f - a) > 0$  for  $\varepsilon$  small enough. This last formula shows that, if  $R(t_0) \leq c/(f - a)$  for some  $t_0 \geq 0$ , then

$$R(t) \leq c/(f - a) \text{ for } t \geq t_0. \quad (21)$$

Integrating (20), we get

$$R(t) \leq \frac{c}{f - a} + \left( R(t_0) - \frac{c}{f - a} \right) e^{-\frac{1}{2}(f - a)(t - t_0)}. \quad (22)$$

Consider  $t_0 = 0$  and suppose for instance  $R(0) > c/(f - a)$ . Then, because of (22), there exists some  $T > 0$  such that  $R(T) \leq 2c/(f - a)$ . Now, if for  $t \geq T$ ,  $R(t) \geq c/(f - a)$ , then (22) remains valid and shows that for  $t \geq T$ ,  $R(t) \leq 2c/(f - a)$ . In the other case, there exists some  $t_0 \geq T$  such that  $R(t_0) < c/(f - a)$  and because of (21),  $R(t) \leq 2c/(f - a)$  for  $t \geq t_0$ . Thus

$$R(t) \leq 2c/(f - a) \text{ on } [T, \infty)$$

and we get (16) with  $b = 4c^2/[\lambda_m(f - a)^2]$ .

**Theorem 1** *Let (H1) (H2) hold and suppose  $G > 0$  in (7). Then any solution of (1) with  $\|x(0), y(0)\| \neq 0$  and  $\|x(0), y(0), z(0)\|$  sufficiently small, satisfies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t[x^2(t) + y^2(t)] = G^{-1}. \tag{23}$$

*Proof:* Let  $\varepsilon > 0$  be given by lemmas 1 and 2. As  $G > 0$ , for  $\mu > 0$  small enough, (6)(7) show that the origin is asymptotically stable and the hypothesis of lemma 3 are satisfied. So we can choose  $\delta > 0$  such that (17)(18) hold. Putting  $\mu = 0$  in (6) (7) and noting  $V_0$  the function  $V$  corresponding to  $\mu = 0$ , we get

$$V_0(x, y, z) = x^2 + y^2 + W^{(3)}(x, y, z) + W^{(4)}(x, y, z), \tag{24}$$

$$V_0'(x, y, z) = -G(x^2 + y^2)^2 + V_0'^{(5)}(x, y, z) + \dots \tag{25}$$

Because of asymptotic stability and lemma 3, there exists a functions  $g(t)$  with

$$g(t) > 0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0, \tag{26}$$

such that, for  $t$  large enough,

$$|W^{(3)}(x, y, z) + W^{(4)}(x, y, z)| \leq g(t)(x^2 + y^2),$$

and

$$|V_0'^{(5)}(x, y, z) + \dots| \leq g(t)(x^2 + y^2)^2.$$

It follows easily that

$$(1 - g(t))(x^2 + y^2) \leq V_0(x, y, z) \leq (1 + g(t))(x^2 + y^2), \tag{27}$$

$$-(G + g(t))(x^2 + y^2)^2 \leq V_0'(x, y, z) \leq -(G - g(t))(x^2 + y^2)^2 \tag{28}$$

and

$$-\frac{G + g(t)}{(1 - g(t))^2} V_0^2 \leq V_0' \leq -\frac{G - g(t)}{(1 + g(t))^2} V_0^2. \tag{29}$$

Putting  $V_{0T} = V(x(T), y(T), z(T))$  for  $T$  given by lemma 3 and integrating (28), we obtain by (26) that

$$\begin{aligned} (1 + g(t))^{-1} \left[ \frac{1}{V_{0T}} + \int_T^t \frac{G+g(s)}{(1-g(s))^2} ds \right]^{-1} &\leq x^2(t) + y^2(t) \\ &\leq (1 - g(t))^{-1} \left[ \frac{1}{V_{0T}} + \int_T^t \frac{G-g(s)}{(1+g(s))^2} ds \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

As

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^1 \frac{G \pm g(s)}{(1 \pm g(s))^2} ds = G,$$

the announced result follows.

## 4 Example

Consider a beam moving as a simple pendulum without friction in a vertical plane around a fixed point  $0$ . In order to make the system asymptotically stable, we add a mass  $m$  moving along the beam with linear friction under the action of a spring fixed to the beam. Let  $0'$  be the equilibrium position of  $m$  when the system is at rest. For simplicity, we assume the mass of the beam is zero, the distance  $d(0, 0') = 1$ ,  $m = 1$  and the gravity coefficient  $g = 1$ . In evident notations, the equation of motion then can be written

$$(1 + x)\theta'' + 2\theta'x' + \sin \theta = 0,$$

$$x'' + \theta x' + kx - (1 + x)\theta'^2 + (1 - \cos \theta) = 0,$$

or

$$\begin{aligned} \theta' &= w, \\ w' &= -\theta + x\theta - 2wy + \theta^3/6 + 2wxy - x^2\theta + \dots, \\ x' &= y, \\ y' &= -kx - hy + w^2 - \theta^2/2 + xw^2 + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Let us now look for a polynomial of order 4 to be a Liapunov function  $V$  for this system :

$$V = V^{(2)} + V^{(3)} + V^{(4)}, \quad (32)$$

where

$$V^{(2)} = \theta^2 + w^2 + \mu(m_0x^2 + 2m_1xy + m_2y^2), \quad (33)$$

$$V^{(3)} = (a_0\theta^2 + 2a_1\theta w + a_2w^2)x + (b_0\theta^2 + 2b_1\theta w + b_2w^2)y, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} V^{(4)} &= (a\theta^4 + b\theta^2w^2 + cw^4 + d\theta^3w + e\theta w^3) + \theta^2(Ix^2 + 2Jxy + Ky^2) \\ &\quad + \theta w(Px^2 + 2Qxy + Ry^2) + w^2(Lx^2 + 2Mxy + Cy^2). \end{aligned} \quad (35)$$

If we choose

$$m_0 = (1 + k)/h + h/k, \quad m_1 = 1/k, \quad m_2 = (1 + 1/k)/h, \quad (36)$$

the terms of order 2 in  $V'$  are given by

$$V'^{(2)} = -2\mu(x^2 + y^2). \quad (37)$$

All the terms of order 3 in  $V'$  will vanish if we determine  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) by the equations

$$\begin{aligned} a_2 + 2b_1 - hb_2 - 4 + 2\mu m_2 &= 0, \\ 2a_0 - 2a_2 - 2kb_1 + 2 &= 0, \\ 2a_1 - kb_2 + 2\mu m_1 &= 0, \\ 2a_1 + kb_0 + \mu m_1 &= 0, \\ a_0 - hb_0 - 2b_1 - \mu m_2 &= 0, \\ 2a_1 - 2hb_1 + 2b_0 - 2b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Putting

$$\Delta = 4h^2 + (k - 4)^2, \quad (39)$$

we easily get

$$\begin{aligned} b_2 &= \Delta^{-1} \{ \mu k^{-2} [2h^2 + 2(4 - k)] + 2\mu(2 + 7/k) - 6h \}, \\ b_0 &= \Delta^{-1} \{ \mu k^{-2} [2h^2 + (2 - k)(4 - k)] - 2\mu(2 + 7/k) + 6h \}. \end{aligned} \quad (40)$$

The other coefficients  $b_1, a_0, a_1$  and  $a_2$  easily follow from (38).

We wish the terms of order 4 in  $V'$  to be given by

$$V'^{(4)} = -(G + \mu G_1)(\theta^2 + w^2)^2 \quad (41)$$

with  $G > 0$ . The terms of order 4 in  $V'$  containing only powers of  $w$  and  $\theta$  arise from the derivative of the first bracket of (35) and from several terms of the derivative of  $V^{(2)}$  and  $V^{(3)}$ . Thus, in order to get (41), we first have to put

$$d = -(7b_0 + 5b_2)/16, \quad e = -(b_0 + 11b_2)/16, \quad (42)$$

which amounts to

$$G + \mu G_1 = (b_0 - 5b_2)/16, \quad (43)$$

and then to solve the system

$$\begin{aligned} 4a - 2b - b_1 + 1/3 &= 0, \\ 2b - 4c + 2b_1 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

We note that the solution  $(a, b, c)$  of (44) is not unique and that the constant  $(G + \mu G_1)$  is strictly positive for  $\mu$  small enough as

$$G = 36h / (4h^2 + (k - 4)^2) > 0.$$

All the other terms of  $V^{(4)}$  will vanish if the following system is satisfied :

$$\begin{aligned} I - L - kQ - 1 + a_2 &= 0, \\ K - N + Q - hR - 2b_1 &= 0, \\ 2J - 2M - hQ - kR + P - 2a_1 + b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} P - 2kM + 2\mu m_1 &= 0, \\ R + 2M - 2hN - 4b_2 &= 0, \\ Q - hM - kN + L + 2 + \mu m_2 - 2a_2 &= 0, \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} P + 2kJ - 2a_1 &= 0, \\ R - 2J + 2hK &= 0, \\ Q + hJ + kK - I - b_1 &= 0. \end{aligned} \quad (46c)$$

The last bloc of (46) directly gives  $P, Q, R$  as functions of  $I, J, K$ . The second bloc then gives

$$L = -I + c_1, \quad M = -J + c_2, \quad N = -K + c_3, \quad (47)$$

where  $c_1, c_2$  and  $c_3$  are suitable constants.

Putting these results in the first bloc of (46), we get

$$\begin{aligned} (2-k) I & & +kh J & & +k^2 K & = c_4, \\ I & & -3h J & + (2-k+2h^2) K & = c_5, \\ -h I & + (4-4k+h^2) J & & + 3kh K & = c_6, \end{aligned} \quad (48)$$

with suitable constants  $c_4, c_5$  and  $c_6$ . The determinant of (48), given by

$$\delta = -4h^4 - h^2(13k^2 - 2k + 20) - 16(k-1)^2$$

is different from zero for any  $h \neq 0$  and therefore (46) has always a unique solution. This achieves the explicit construction of a Liapunov function of type (32) with derivative

$$V' = -2\mu(x^2 + y^2) - (G + \mu G_1)(\theta^2 + w^2)^2 + \dots$$

We note that the existence of such a function is assured by a lemma of A. Ya Savchenko (see for instance [7] or [1] p.49). Explicit computation is only needed for the constant  $(G + \mu G_1)$  depending on the coefficients of  $\theta^4, \theta^2 w^2$  and  $w^4$  arising from the derivaton of  $V^{(2)}$  and  $V^{(3)}$ .

## 5 Remark

Formula (23) in Theorem 1 might suggest that optimal control should be obtained for the biggest possible value of the constant  $G$ . Unfortunately, this is not true. Indeed, formula (23) gives information of the ultimate behaviour of the variables to be controlled and (30) might hold only for very large values of  $T$ . So (23) gives no information of the smallness of  $x$  and  $y$  after a short lapse of time. Formula (45) shows that one condition for a maximum value of  $G$  is given by  $k = 4$ . In this case,  $G = 9/h$  and there is no possible maximum value of  $G$  which tends to infinity as  $h$  tends to zero. Numerical computations shows that the variables  $x, y$  tend to zero very fastly for  $k = 4$  and  $h$  near 0,1.

## References

- [1] GORR G. V., ILYOUKHINE A. A., KOVALEV A. M., SAVCHENKO A. YA., *Nelinejniy Analis Povedeniya Mekhanicheskikh sistem*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.
- [2] ISIDORI A., *Nonlinear control systems (2d ed.)*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [3] KHALIL H.K., *Nonlinear systems (2d ed.)*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [4] LIAPUNOFF A.M., *Problème général de la stabilité du mouvement*, Gabay, Paris, 1988. Reimpression of the French translation of the fundamental Russian paper of Liapunov published in Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892.
- [5] PEIFFER K., SAVCHENKO A. YA, *On Passive Stabilization in Critical Cases*, J. of Math. Analysis and Applications, **244**, 106-119, 2000.
- [6] ROUCHE N., HABETS P., LALOY M., *Stability theory by Liapunov's Direct Method*, Applied Mathematical Sciences 22, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [7] SAVCHENKO A. YA, *Oustoichivost stationarnykh dvizhenij mekhanicheskikh sistem*, Naukova Dumka, Kiev, 1977.

K. Pfeiffer et al.: On the asymptotic behavior of a passively...

- [8] YOSHIZAWA T., *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

## On the pointwise continuous dependence of an approximate solution of a nonlinear heat conduction ill-posed problem

Nota di S. Rionero<sup>1</sup> e I. Torcicollo<sup>1\*</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza dell'11 novembre 2000)

**Abstract** - The pointwise continuous dependence of an approximate solution of the cold ice nonlinear heat conduction equation is performed.

**Riassunto** - Si dimostra la dipendenza continua puntuale di una soluzione approssimata dell'equazione non lineare di conduzione del calore nel "cold ice".

### 1. Introduction

Ice at a temperature lower than its freezing point is called "cold", while ice at freezing point (which is essentially a two phase mixture of ice and water) is called "temperate" [2], [3]. According to the empirical relation of Dillard and Timmerhans's [3], the thermal conductivity  $k$  of cold ice, in the range  $[-40^{\circ}C, 0^{\circ}C]$  depends on the temperature  $T$  as follows

$$k(T) = (2.1725 - 3.403 \times 10^{-3} T + 9.085 \times 10^{-5} T^2) Kg \ ms^{-3} (deg)^{-1}. \quad (1)$$

Therefore the equation governing the temperature evolution in cold ice is

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k(T) \nabla T] \quad (2)$$

where the density  $\rho$  and the specific heat at a constant pressure  $c_p$  are given by [2], [3]

$$\rho = 900 Kg m^{-3} \quad c_p = 2 \times 10^3 JKg^{-1} (^{\circ}K)^{-1}. \quad (3)$$

Cold ice can be found in many situations: on frozen lakes and seas, on the top of the mountains. Therefore the solvability of (2), under appropriate conditions is relevant to many practical problems [1], [4],[8]. In particular, in the context of frozen lakes the problem of determining the temperature distribution in an ice sheet and that of determining its thickness arises. Specifically

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II". Complesso "Monte S. Angelo", Edificio T. Via Cintia, 80126 Napoli.

let  $Oxz$  be a two dimensional frame of reference, the  $z$  axis being downward and consider the domain

$$\tilde{\Omega}(t) = \{(x, z, t) : 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq z \leq l(x, t), t \geq 0\}$$

where  $\alpha$  is a prescribed positive constant and  $l(x, t)$  is an unknown positive function. Then arises the not well posed problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k(T) \nabla T] & (x, z) \in \tilde{\Omega}(t) \times [0, T] \\ T(x, z, 0) = T_0(x, z) & \text{in } \tilde{\Omega}(0) \\ T(x_i, 0, t) = \tilde{p}_i + \tilde{h}_i(t) & t \in [0, T] \\ & (i = 0, 1) \\ \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{(x_i, 0, t)} = \tilde{q}_i + \tilde{\delta}_i(t) & t \in [0, T] \\ T[x, l(x, t), t] = 0 & (x, t) \in [0, \alpha] \times [0, T] \end{array} \right. \quad (4)$$

where  $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$  are prescribed constants,  $\tilde{h}_i, \tilde{\delta}_i$  are prescribed functions,  $T$  is a positive constant, and  $x_0 = 0, x_1 = \alpha$ . The problem (4) describes the following real situation. Consider a frozen lake and let  $O = (0, 0)$  and  $A = (\alpha, 0)$  be two points close to the shore. Then the problem of providing an estimate for the thickness and temperature of the vertical sheet of cold ice connecting  $O$  to  $A$ , once the temperature and the heat flux on only  $O$  and  $A$  are known, arises. A contribution to the solution of problem (4) has been obtained in [5], providing an approximate explicit solution. Following [1], the starting point of [5] is the fact that, in the linear case, the variations of temperature along a cold ice sheet due to a sudden increase in air temperature, are very very slow. Based on this the evolution of the ice sheet has been represented with a sequence of steady states, requiring as an indication that this model is correct, well posedness with respect to the data. But, concerning the temperature, the continuous dependence has been obtained with respect to a weighted  $L^2$ -norm, without considering the pointwise continuous dependence which as it is well known, is the best for practical and theoretical applications. Our aim here is to reconsider the problem and to obtain the pointwise continuous dependence of the temperature (Section 3). Section 2 is dedicated to some necessary preliminaries.

2. Preliminaries

By introducing the scalings

$$\begin{cases} x = \lambda_0 x' \\ z = \lambda_0 z' \\ t = t_0 t' \\ T = T_0 T' \end{cases} \tag{5}$$

on choosing

$$\begin{cases} \lambda_0 \rho c_p = 2.1725 t_0 \\ T_0 = 166.8^\circ C \end{cases} \tag{6}$$

and setting

$$\begin{cases} u = -T' \\ \epsilon_1 = 0.261 \\ \epsilon_2 = 1.163 \end{cases} \tag{7}$$

equation (2) can be written in the form

$$u_t = \Delta F \tag{8}$$

where  $F = u + \frac{1}{2}\epsilon_1 u^2 + \frac{1}{3}\epsilon_2 u^3$ . Hence, problem (4) becomes <sup>2</sup>

$$\begin{cases} u_t = \Delta F & \text{in } \tilde{\Omega}(t) \times [0, T] \\ u(x, z, 0) = u_0(x, z) & \text{in } \tilde{\Omega}(0) \\ u(x_i, 0, t) = p_i + h_i(t) & t \in [0, T] \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{(x_i, 0, t)} = q_i + \delta_i(t) & t \in [0, T] \\ u[x, l(x, t), t] = 0 \end{cases} \tag{9}$$

where  $p_i, q_i, h_i, \delta_i$  ( $i=0,1$ ) are the quantities corresponding respectively to  $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{h}_i, \bar{\delta}_i$ , through (5) - (7). Let us consider the quasi steady problem <sup>3</sup>

$$\begin{cases} \Delta F(U) = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}^* \\ U(x_i, 0) = p_i \\ U_z(x_i, 0) = q_i \\ U[x, \lambda(x)] = 0 \end{cases} \quad (i = 0, 1) \tag{10}$$

<sup>2</sup>Let us remark that we assume that the ice sheet bottom face, i.e. the ice-water interface, is at  $0^\circ C$ , misregarding the influence of the weight on the freezing temperature.

<sup>3</sup>In the Stefan Problem, when the heat transfer in each phase is described by an elliptic equation, the problem is called quasi steady [13].

where

$$\tilde{\Omega}^* = \{(x, z) : 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq z \leq l(x)\}.$$

The problem (10) has been solved in [5] and the relevant solution is

$$\begin{cases} U = \sqrt[3]{\sqrt{r_1^2(x, z) + s_1 + r_1(x, z)} - \sqrt[3]{\sqrt{r_1^2(x, z) + s_1 - r_1(x, z)} - \frac{\epsilon_1}{2\epsilon_2}} \\ 0 \leq x \leq \alpha, \quad 0 \leq z \leq \lambda(x) \end{cases} \quad (11)$$

$$\lambda(x) = -\frac{bx + d}{ax + c} \quad 0 \leq x \leq \alpha \quad (12)$$

where

$$\begin{cases} r_1(x, z) = \frac{3}{2\epsilon_2}(axz + bx + cz + d) + \frac{(6\epsilon_2 - \epsilon_1^2)\epsilon_1}{8\epsilon_2^3} \\ s_1 = \left(\frac{4\epsilon_2 - \epsilon_1^2}{4\epsilon_2^3}\right) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} d = P_0 & b = \frac{1}{\alpha}(P_1 - P_0) \\ c = q_0Q_0 & a = \frac{1}{\alpha}(q_1Q_1 - q_0Q_0) \end{cases} \quad (14)$$

and

$$\begin{cases} P_i = p_i + \frac{1}{2}\epsilon_1 p_i^2 + \frac{1}{3}\epsilon_2 p_i^3 \\ Q_i = 1 + \epsilon_1 p_i + \epsilon_2 p_i^2. \end{cases} \quad (i = 0, 1)$$

**Remark 1** - *Let us underline that, for  $a \neq 0$ ,  $\lambda$  is a nonlinear function of  $x$ .*

For the sake of simplicity let us set

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \{(x, z) : 0 \leq x \leq \alpha, z = 0\} \\ \Gamma(t) = \{(x, z) : x = 0, 0 \leq z \leq l(0, t)\} \\ K(t) = \{(x, z) : x = \alpha, 0 \leq z \leq l(\alpha, t)\} \end{cases} \quad (15)$$

and notice that, there exists a constant  $M_2$  such that

$$\left( |U|_{\Gamma_i}, \left| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_i} \right) \leq M_2 \quad i = 1, 2, 3$$

where  $\Gamma_1 = \mathcal{H}, \Gamma_2 = \Gamma, \Gamma_3 = K$ . Setting

$$\begin{cases} v = u - U \\ L(U, v) = (1 + \epsilon_1 U + \epsilon_2 U^2)v + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + 2\epsilon_2 U)v^2 + \frac{1}{3}\epsilon_2 v^3 \end{cases} \quad (16)$$

from (9) - (10) it follows that in the interval  $[0, T]$  one has

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t = \Delta L \quad (x, z) \in \tilde{\Omega}, \\ v(x_i, 0, t) = h_i(t) \\ v_z(x_i, 0, t) = \delta_i(t) \\ v[x, l, t] + U(x, l) = 0 \\ v(x, z, 0) = u_0 - U \quad (x, z) \in \tilde{\Omega}_0. \end{array} \right. \quad (i = 0, 1) \quad (17)$$

Our aim is to show that

$$|v(x, z, t)| < \varepsilon \quad (x, z) \in \tilde{\Omega} \quad t \in [0, T]$$

with  $\varepsilon \rightarrow 0$  when  $\sup[|v_0| + |h_i| + |\delta_i|] \rightarrow 0$ .

In order to obtain this goal we need the following results showed in [1], [4], [10].

**Theorem 1** - Let  $l < \infty$  denote a positive constant and let

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \in [0, l] \rightarrow f(x) \in R, \quad f \in L^2[0, l], \\ A(s) = \int_0^l (l-x)^s f^2(x) dx \quad s \geq 0, \quad A(0) > 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Then

$$A(s) \leq \alpha A(s+1) \quad \forall s > 0 \quad (19)$$

where  $\alpha$  is the constant independent of  $s$ , given by

$$\alpha = \frac{A(0)}{A(1)}. \quad (20)$$

When  $f$  depends also upon time  $t$ , and so does  $l$ , (20) defines the function

$$\alpha : t \in R^+ \rightarrow \alpha(t) = \frac{\int_0^{l(t)} f^2(x, t) dx}{\int_0^{l(t)} [l(t) - x] f^2(x, t) dx} \quad (21)$$

at any instant  $t$  such that  $\int_0^{l(t)} [l(t) - x] f^2(x, t) dx > 0, l(t) > 0$ .

**Theorem 2** - Let  $l_1, l_2 (> l_1)$  and  $T$  be three positive constants and let  $l$  and  $f$  be continuous functions of  $x$  and  $t$  such that

$$0 \leq l_1 \leq l(t) \leq l_2, \quad \int_0^{l(t)} f^2(x, t) dx > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (22)$$

Then  $\alpha \in C[0, T]$ . Further, let  $I$  be the subset of  $L^2_{loc}[(R^+)^2]$  constituted by the functions  $\phi$  such that

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(x, 0) = 0, & x \in [0, l(0)] \\ \phi(x, t) \neq 0, & t \in ]0, T[ \\ t^p g(t) \psi_1(x, t) \leq |\phi(x, t)| \leq g(t) \psi_2(x, t), & x \in [0, l(t)], t \in [0, T], p < \frac{1}{2} \\ \int_0^{l_0} \psi_i^2(x, 0) dx > 0, & i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (23)$$

$g$  and  $\psi_i$  being non negative functions defined for  $t \in [0, T]$  and  $x \in [0, l(t)]$ . Then  $f \in I$  implies  $\alpha \in L^1[0, T]$ .

**Remark 2** - Let us remark that the assumptions of Theorem 2 allow  $f$  a very general behaviour. In fact

- i)  $f \in L^2_{loc}(R^+)^2$  allows  $f$  to grow exponentially when  $x \rightarrow \infty$  or  $t \rightarrow \infty$ ;
- ii) assumptions (23) allow  $f$  to tend to zero like  $At^q$ ,  $A$  and  $q$  being positive constants, when  $t \rightarrow 0$ ;
- iii)  $f=c = \text{const.} \neq 0, \forall t \in R^+ \Rightarrow f \notin I$ .
- iv) We notice that

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(t)\psi(x) \leq |f| \leq mg(t)\psi(x) & (x, t) \in (R^+)^2 \\ g(t) = \exp[\exp(t) - \exp(1/t)], & t \in R^+ \\ \psi(x) = \exp[\exp(\exp(x))] & x \in R^+ \\ m = \text{positive constant} \geq 1 \end{array} \right. \quad (24)$$

imply (23).

**Theorem 3** - Let

$$|v| < R = \text{positive constant}, t \in [0, T]$$

$$\bar{U} = \sup |U|$$

and

$$\mathcal{E}(U, v) = \int_0^v L^{2n+1}(U, \bar{v}) d\bar{v} \quad n \in N. \quad (25)$$

Then, it turns out that

$$L(v) \geq \bar{A}v, \quad \forall v \neq 0 \tag{26}$$

$$L^{2n+2} \leq 2(n+1)m^* \mathcal{E}(U^*, v) \tag{27}$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} m^* = m + \epsilon_2 \left( R + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2^{-1} + 2\bar{U}}{2} \right)^2 \\ m = 1 - \frac{\epsilon_1^2}{4\epsilon_2} (> 0) \\ \bar{A} = 1 - \frac{3}{16} \left( \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2} \right). \end{array} \right. \tag{28}$$

**Remark 3** - Let us notice that from (26) it turns out that

$$\left\{ \begin{array}{l} v > 0 \Rightarrow L^{2n+1}(v) \geq \bar{A}^{2n+1} v^{2n+1} \Rightarrow \int_0^v L^{2n+1} dv \geq \frac{\bar{A}^{2n+1}}{2(n+1)} v^{2n+2} \\ v < 0 \Rightarrow L^{2n+1}(v) \leq \bar{A}^{2n+1} v^{2n+1} \Rightarrow \int_v^0 L^{2n+1} dv \leq -\frac{\bar{A}^{2n+1}}{2(n+1)} v^{2n+2} \end{array} \right.$$

i. e.

$$\int_0^v L^{2n+1} dv \geq \frac{\bar{A}^{2n+1}}{2(n+1)} v^{2n+2} \quad \forall v. \tag{29}$$

### 3. Pointwise continuous dependence for the temperature

We are now in position of proving the following theorem of pointwise continuous dependence.

**Theorem 4** - Let

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in I \\ |v| + |l| + |l_t| + |\nabla(l-z)| + \left| \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right| \leq M, \quad \forall x, z, \quad t \in [0, T] \\ \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma} (l-z)^m \frac{dL^2}{d\mathbf{n}} d\Sigma \right| \leq \eta^* \quad t \in [0, T] \end{array} \right. \tag{30}$$

where  $\Sigma = \mathcal{H} \cup \Gamma \cup K$  and  $M$  and  $\eta^*$  are two positive constants. Then the pointwise continuous dependence follows, according to

$$|v(x, z, t)| \leq \frac{1}{\bar{A}} [\sup_{\bar{\Omega}_0} L(v_0) + a_1] \quad t \in [0, T]$$

where  $a_1 \rightarrow 0$  when  $\sup[|v_0| + |h_i| + |\delta_i|] \rightarrow 0$ .

**Proof.** Let us set

$$\mathcal{M} = \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m \mathcal{E} d\tilde{\Omega} \quad (31)$$

where  $\mathcal{E}$  is given by (25). Evaluating the time derivative of (31) along the solution of (17) it turns out that

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} \leq & m|l| \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^{m-1} \mathcal{E} d\tilde{\Omega} + \int_{\Sigma} (l-z)^m L^{2n+1} \nabla L d\Sigma + \\ & + m \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^{m-1} |\nabla(l-z)| |L^{2n+1} \nabla L| d\tilde{\Omega} - (2n+1) \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m L^{2n} (\nabla L)^2 d\tilde{\Omega}, \end{aligned} \quad (32)$$

and (30) implies

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} \leq & mM \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^{m-1} \mathcal{E} d\tilde{\Omega} + \int_{\Sigma} (l-z)^m L^{2n+1} \nabla L d\Sigma + \frac{mM\varepsilon}{2} \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^{m-1} L^{2n} (\nabla L)^2 d\tilde{\Omega} + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} mM \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^{m-1} L^{2n+2} d\tilde{\Omega} - (2n+1) \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m L^{2n} (\nabla L)^2 d\tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

From (27) and (19), on choosing  $\varepsilon = \frac{2(2n+1)}{mM\alpha(t)}$ , by straightforward calculation we obtain

$$\dot{\mathcal{M}} \leq \beta_n(t) \mathcal{M} + \eta^* \quad (33)$$

where

$$\beta_n(t) = mM\alpha(t) + \frac{m^2 M^2 \alpha^2(t)(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Integrating it follows that

$$\mathcal{M} \leq \mathcal{M}_0 e^{\int_0^t \beta_n(\tau) d\tau} + \eta^* e^{\int_0^t \beta_n(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t d\tau e^{-\int_0^\tau \beta_n(\xi) d\xi} \leq [\mathcal{M}_0 + \eta^* T] e^{\int_0^T \beta_n(\tau) d\tau}. \quad (34)$$

On the other hand Remark 3 implies

$$\int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m v^{2n+2} d\tilde{\Omega} \leq \frac{2n+2}{A^{2n+1}} \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m \mathcal{E} d\tilde{\Omega}$$

and hence

$$\left( \int_{\tilde{\Omega}} (l-z)^m v^{2n+2} d\tilde{\Omega} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \leq \left( \frac{2n+2}{A^{2n+1}} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \mathcal{M}^{\frac{1}{2n+2}}. \quad (35)$$

Let us recall now that in [4] has been shown that

$$|v|_{\Gamma_i} \leq \frac{1}{A} [\sup_{\Gamma_{i0}} L(v_0) + \bar{m}\bar{\delta}] = \gamma_i \quad i = (1, 2, 3) \quad (36)$$

where  $\bar{\delta}$  is the sup  $|h_i(t)|$  in  $[0, T]$  and

$$\begin{cases} \bar{m}_i = \max(m_i) & i = (1, 2, 3) \\ m_i = \frac{1}{6}[6Q(p_i) + 3(\epsilon_1 + 2\epsilon_2 p_i)\bar{\delta} + 2\epsilon_2 \bar{\delta}^2], & Q(p_i) = 1 + \epsilon_1 p_i + \epsilon_2 p_i^2, \quad (i = 0, 1). \end{cases}$$

Returning to (30)<sub>3</sub>, because [5]

$$\begin{cases} |L| \leq (1 + \epsilon_1 U + 2\epsilon_2 U^2)|v| + \frac{1}{2}[\epsilon_1 + 2\epsilon_2 U]v^2 + \frac{1}{3}\epsilon_2|v|^3 \\ \left| \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} \right| \leq |\epsilon_1 + 2\epsilon_2 U| \left| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right| + (1 + \epsilon_1 U + \epsilon_2 U^2) \left| \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right| + \\ + \epsilon_2 \left| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right| v^2 + |\epsilon_1 + 2\epsilon_2 U| |v| \left| \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right| \end{cases} \quad (37)$$

it follows that

$$\begin{cases} |L^{2n+1}|_{\Gamma_i} \leq a_1^{2n+1} \\ \left| \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_i} \leq c_1 \end{cases} \quad (38)$$

where

$$\begin{cases} a_1 = (1 + 2M^* + \bar{\gamma})^2 \bar{\gamma} \\ c_1 = M^*[2M^* + 2(\bar{\gamma} + 1)]^2 \\ M^* = \max(M, M_2) \\ \bar{\gamma} = \max(\gamma_i). \end{cases}$$

From (38) we obtain

$$\int_{\Sigma} (l - z)^m |L^{2n+1}| |\nabla L| d\Sigma \leq c_2 a_1^{2n+1},$$

where  $c_2 = M^m(2M + \alpha)c_1$ .

Finally the initial value  $\mathcal{M}_0$  of  $\mathcal{M}$  can be estimated as follows:

$$\mathcal{M}_0 = \int_{\tilde{\Omega}_0} (l - z)^m \int_0^{v_0} L^{2n+1} dv d\tilde{\Omega} \leq l_0^m \int_{\tilde{\Omega}_0} L^{2n+2}(v_0) d\tilde{\Omega}_0.$$

From (35), by using the estimate (34), we obtain

$$\left( \int_{\tilde{\Omega}} (l - z)^m v^{2n+2} d\tilde{\Omega} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \leq \left( \frac{2n+2}{A^{2n+1}} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \left[ \mathcal{M}_0^{\frac{1}{2n+2}} + c_2^{\frac{1}{2n+2}} a_1^{\frac{2n+1}{2n+2}} \right]$$

and hence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\tilde{\Omega}} [(l - z)^{\frac{m}{2n+2}} v]^{2n+2} d\tilde{\Omega} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \leq \frac{1}{A} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\tilde{\Omega}_0} L^{2n+2}(v_0) d\tilde{\Omega}_0 \right)^{\frac{1}{2n+2}} + a_1 \right], \quad (39)$$

i.e. the pointwise continuous dependence according to

$$|v(x, z, t)| \leq \frac{1}{A} [\sup_{\tilde{\Omega}_0} L(v_0) + a_1], \quad (40)$$

where  $a_1 \rightarrow 0$  when  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ . In fact when  $\sup[|v_0| + |h_i| + |\delta_i|] \rightarrow 0$ , it follows that  $L(v_0) \rightarrow 0$ ,  $\bar{\delta} \rightarrow 0$ ,  $\gamma_i \rightarrow 0$ ,  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ .

**Remark 4** - Let us notice that in [5], in any interval of time  $[0, T^*]$  has been introduced a sequence of instants  $0 = t_1 < \dots < t_{n+1} = T^*$  and a sequence of steady states  $(U_j, \lambda_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) for the temperature and thickness obtained solving problem (10) under the substitution

$$\begin{pmatrix} p_0 + h_0(t_j) & p_1 + h_1(t_j) & q_0 + \delta_0(t_j) & q_1 + \delta_1(t_j) & \lambda_j(x) \\ p_0 & p_1 & q_0 & q_1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

It is easily seen that theorem 4 holds for any steady state  $(U_j, \lambda_j)$  and ensures the pointwise continuous dependence in the interval  $[t_j, t_{j+1}]$ .

**Acknowledgements** - This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of waves propagation and stability in continuous media".

## References

- [1] J.N. Flavin, S. Rionero, *On the temperature distribution in cold ice*, Rend. Acc. Lincei Math. Appl. vol. VIII, Fasc. IV, pp. 299-312, 1997.
- [2] K. Hutter, *Theoretical Glaciology*, Dordrecht, The Netherlands, D. Reidel, 1983.
- [3] P. V. Hobbs, *Ice Physics*, Oxford, Clarendon Press, 1974.
- [4] J.N. Flavin, S. Rionero, *A Free Boundary Value Problem for a nonlinear Heat Equation*, (to appear).
- [5] S. Rionero, I. Torricollo, *On an ill-posed problem in nonlinear heat conduction*, Transport Theory and Statistical Physics, vol. 29, Nos. 1 & 2, 173-186, (2000).
- [6] G. S. H. Lock, *The growth and decay of ice*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [7] M. C. Flemings, *Solidification Processing*, Mc Graw-Hill, Book Company.
- [8] L.E. Payne, B. Straughan, *Error estimates for the temperature of a piece of cold ice, given data on only part of the boundary*, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, vol. 14, n. 5, pp. 443-452, 1990.

- [9] S. Rionero, *Stability results for hyperbolic and parabolic equations*, In: Proceedings of the II Int. Workshop on Nonlinear Kinetic Theory and Mathematical Aspects of Hyperbolic Systems (S.Remo, 26-30 Sept. 1994), Transport Theory and Statistical Physics, 25 (3-5), 1996, pp. 323-337.
- [10] S. Rionero, *A note on the weighted  $L^2$ -norms*, Acc. Sci. Fis. Napoli, vol.LXVI, pp.173-180, (1999).
- [11] J.N. Flavin, S. Rionero, *Asymptotic and other properties of a Nonlinear Diffusion Model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 228, pp.119-140, 1998.
- [12] S. Rionero, I. Torricollo, *Estimates for thickness and temperature of a vertical sheet of cold ice, given data on only two points of the upper boundary*, In: Proceedings of the IX Int. Conf. on Waves and Stability in Continuous Media (Monopoli (BA), Oct. 6-11, 1997), Serie II, n. 57, pp. 427-432, 1998.
- [13] M. Meirmanos Anvarbek, *The Stefan Problem*, De Gruyter expositions in Math. 3, 1992.
- [14] J. R. Cannon, A. Fasano, *A nonlinear parabolic free boundary problem*, Ann. Mat. Pura Appl., 107, 311-341, 1975.
- [15] J. R. Cannon, C.D. Hill, *Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation*, J. Math. Mech., 17, 1-19, 1967.
- [16] J. R. Cannon, M. Primicerio, *Remarks on the one-phase Stefan Problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary*, J. Math. Anal. Appl. 35, 193-205, 1971.



## La discussione sul metodo e la sfida di Vincenzo Flauti ai matematici del Regno di Napoli

Nota di Romano Gatto<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Luciano Carbone  
(Adunanza dell'11 novembre 2000)

**Key words:** Analisi, sintesi, sfida

**Abstract** – In the last decades of the XVIIIth century and the first decades of the XIXth century there was in Neaples a lively debate between the exponents of two mathematics schools, the Synthetic School and the Analytic School. It was a long and polemic discussion that showed two different ways to conceive the geometry and particularly the resolution of the geometric problems. This discussion finished in 1839 only, when Vincenzo Flauti banished a mathematical challenge that, according to his intentions, would have had to enact the superiority of the synthetic school, and that, contrary, it demonstrated the validity, the convenience and the superiority of the methods of the lagrangian algebraic analysis.

**Riassunto** – Negli anni a cavallo tra la fine del XVIII secolo e l'inizio del XIX secolo vi fu a Napoli un serrato dibattito fra gli esponenti di due scuole di matematica, la Scuola sintetica e la Scuola analitica. Si trattò di una discussione lunga e polemica che mise in luce due differenti modi di concepire la geometria e, in particolare, risoluzione dei problemi geometrici. L'esito di tale discussione si ebbe soltanto nel 1839, quando Vincenzo Flauti bandì una sfida matematica che, secondo le sue intenzioni avrebbe dovuto sancire la superiorità della scuola sintetica, e che, invece, mise davanti agli occhi di tutti la validità e la convenienza dei metodi dell'analisi algebrica lagrangiana.

---

<sup>1</sup> Dipartimento di Matematica dell'Università della Basilicata.

## 1 - LA SCUOLA DEI SINTETICI E QUELLA DEGLI ANALITICI

Tra la fine del Settecento e gli inizi dell'Ottocento si andò instaurando a Napoli una forte rivalità scientifica tra i matematici aderenti a due differenti scuole, quella dei *sintetici* e quella degli *analitici*. La prima, fondata intorno al 1771 da Nicolò Fergola (1753-1824)<sup>2</sup>, era così denominata per la preferenza che in essa si dava al metodo sintetico degli antichi geometri greci. Ciò non significa, si badi bene, che in essa si percorresse unicamente la via euclidea. Se è vero, infatti, che Fergola vagheggiava l'ideale del ripristino della purezza della geometria degli antichi, è anche vero che egli guardava con vivo interesse anche all'*ars analytica* cartesiana, tanto da porsi, in un certo senso, erede della tradizione cartesiana che a Napoli aveva avuto una stagione particolarmente felice nella seconda metà del Seicento e nei primi decenni del Settecento<sup>3</sup>. Egli promosse una riforma del metodo dell'analisi geometrica degli antichi introducendo, accanto ai procedimenti sintetici tipici di questo metodo, considerazioni analitiche di stile cartesiano con l'adozione di particolari sistemi di riferimento suggeriti via via dal problema in esame. Il suo era dunque un metodo misto, nel quale, comunque, la sintesi aveva un ruolo prevalente, tant'è che ogni considerazione fatta con l'analisi algebrica cartesiana veniva puntualmente interpretata nel suo significato geometrico. Così facendo egli potenziò e rese più agile l'analisi geometrica degli antichi senza "contaminare" la purezza della geometria. Inoltre riuscì a ricondurre i problemi di sito e posizione a soli tre tipi per ciascuno dei quali aveva trovato un metodo risolutivo generale che riduceva notevolmente la difficoltà propria dell'analisi geometrica; di dover, cioè, considerare la risoluzione dei singoli problemi ciascuno come una cosa a sé stante. Ciò che era bandito era il recente metodo delle coordinate inventato da Lagrange, che riducendo la risoluzione dei problemi a puro calcolo algebrico, ne faceva perdere ogni identità geometrica.

Fergola fu un matematico di indiscusso valore e un maestro di indubbe qualità. Egli raccolse intorno a sé numerosi allievi ai quali trasmise il gusto per l'analisi geometrica degli antichi: Annibale Giordano, Vincenzo Flauti, Felice Giannattasio, Giuseppe Scorza, Francesco Bruno, Giuseppe Sangro, Stefano Forte, Ferdinando De Luca. Grande fu la fama guadagnata dalla sua scuola che riscosse apprezzamenti anche oltre i confini dell'Italia, in Francia, dove pure c'erano matematici che apprezzavano e coltivavano con uguale passione il

---

<sup>2</sup> Su Nicola Fergola e sul posto che la sua scuola occupa nella storia della matematica italiana della seconda metà del '700 e dei primi dell'800, cfr. F. Amodeo, *Vita matematica napoletana*, Napoli, Giannini e figli, 1905, v. I; G. Loria, *Nicola Fergola e la scuola matematica che lo ebbe a duce*, Genova, Atti della R. Università di Genova, Tipografia dell'istituto dei sordo-muti, 1892; G. Ferraro - F. Palladino, *Il calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicolò Fergola*, Napoli, La Città del Sole, 1995.

<sup>3</sup> Cfr. R. Gatto, *Il cartesianesimo matematico a Napoli*, "Giornale Critico della Filosofia Italiana", LXXV (1996), pp. 360-379.

metodo degli antichi geometri. Molto eloquente, in merito è l'elogio che ne fece Michel Chasles nel suo *Aperçu historique*:

“Le goût de cette Géométrie, qui a donné tant diéclat aux sciences mathématiques jusqu'il y a près d'un siècle, surtout dans la patrie de Newton, s'était affaibli depuis, et aurait presque disparu, si les géomètres italiens ne lui fussent restés fidèles. On doit, de nos Jours, au célèbre Fergola, et à ses disciples, MM. Bruno, Flauti, Scorza, plusieurs écrits importants sur l'Analyse géométrique des Anciens, qui s'y trouve rétablie dans sa pureté originaire”<sup>4</sup>

Il ripristino dell'analisi geometrica degli antichi e la sua estensione all'analisi cartesiana, rispondeva innanzitutto a un'esigenza di carattere "estetico": l'affermazione del primato della geometria pura sulla geometria contaminata da un uso indiscriminato dell'algebra. A render ragione della scelta operata nella Scuola sintetica c'erano i brillanti risultati da essa ottenuti, nella risoluzione di vecchi e nuovi problemi, soprattutto quelli di sito e posizione, risoluzione che aveva messo in evidenza oltre all'eleganza anche l'efficacia dell'analisi del Fergola.

Conservatore e reazionario, allo scoppio della Rivoluzione napoletana del 1799, Fergola si ritirò a vita privata e lasciò la sua scuola a Vincenzo Flauti (1782-1863) il più illustre dei suoi allievi. Autore di numerosi importanti trattati e manuali, professore di Matematica sintetica all'Università di Napoli dal 1803<sup>5</sup>, Segretario aggiunto per la Sezione matematica dell'Accademia delle Scienze dal 1816 (in seguito divenne Segretario perpetuo), direttore della Biblioteca universitaria dal 1822 al 1838<sup>6</sup>, Flauti godette di prestigio e autorevolezza non minore di quella del maestro tanto da riuscire ad incidere anche sulle scelte di politica scolastica in materia di insegnamento pubblico della matematica. Ottenne, infatti, dal governo borbonico l'emanazione di un decreto che rendeva obbligatorio l'insegnamento degli *Elementi* di Euclide in tutti i collegi e licei del Regno. Nel 1812, diede alle stampe un *Corso di Geometria elementare*<sup>7</sup> perfettamente aderente agli indirizzi metodologici della scuola sintetica. Questo iniziava con lo studio degli *Elementi* di Euclide; proseguiva poi con la trattazione delle sezioni coniche, quella dei *Dati* di Euclide e degli scritti di Archimede e di Pappo. A completamento del corso era previsto anche lo studio della trigonometria piana e sferica. Ma la centralità della geometria nell'indirizzo sintetico trovava una significativa affermazione anche nell'insegnamento di altre discipline matematiche, quali l'algebra e la

4 Cfr. M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et développement des méthodes en géométrie*, Paris, 1837. Qui si cita dall'edizione Paris, Gauthier-Villars, 1875, p. 46.

5 Nel 1812 cambiò la sua cattedra con quella di Analisi sublime e arte euristica che tenne fino al 1849 quando fu nominato professore onorario.

6 Cfr. V. Trombetta, *Storia della Biblioteca Universitaria di Napoli dal vicereame spagnolo all'unità d'Italia*, Napoli, Vivarium, 1995.

7 V. Flauti, *Corso di Geometria elementare e sublime*, Napoli, Stamperia Privata dell'autore, 1842-1844.

meccanica. La prima, secondo Flauti, doveva essere impartita attenendosi alla forma euclidea; la seconda doveva evitare il più possibile i procedimenti analitici di Lagrange<sup>8</sup>.

Agli inizi dell'Ottocento, a questa scuola si contrappose la *Scuola degli analisti* di Francesco Paolo Tucci e Salvatore De Angelis, due allievi di Fergola che avevano abbandonato le vie indicate dal maestro per seguire invece i metodi dell'analisi algebrica lagrangiana e le più recenti teorie di Legendre, Pascal, Carnot, Desargue, Poncelet ecc. penetrate a Napoli soprattutto nel decennio che precedette la Repubblica Napoletana del 1799<sup>9</sup>. Nonostante i rigori della censura borbonica, gli intellettuali napoletani, nutriti degli ideali illuministici, avevano saputo tenere aperti canali di informazione con la Francia. In particolare, i giovani matematici si appassionarono alla nuove teorie lagrangiane che stavano rivoluzionando più di un settore della matematica. Nel 1789 Carlo Lauberg, che fu uno dei protagonisti della rivoluzione del 1799, scrisse una *Memoria sull'unità dei Principj della Meccanica*<sup>10</sup>, un breve opuscolo di poco più di 30 pagine, nel quale dopo aver elogiato Lagrange per essere stato il primo a dimostrare che dal principio delle velocità virtuali si potevano dedurre tutti gli altri principi necessari a risolvere i problemi della statica e della dinamica, mostrava una via molto agevole per pervenire alla formulazione analitica di detto principio. E ancora alla *Mécanique analytique* di Lagrange si era ispirato Vincenzo De Filippis, ministro e martire della Repubblica napoletana del 1799, che probabilmente nello stesso periodo scrisse un trattato di meccanica analitica in tre libri, *De' principj della meccanica*, rimasto manoscritto e ora introvabile<sup>11</sup>.

Nel 1790 Carlo Lauberg, insieme col giovane matematico Annibale Giordano, aprì a Napoli una scuola di chimica e matematica dove si insegnavano le teorie di Lagrange e Lavoisier e contemporaneamente si faceva propaganda delle idee giacobine. Questa scuola fu frequentata da tanti giovani che furono poi tra i protagonisti dell'epopea rivoluzionaria del 1799<sup>12</sup>. Per essi Giordano e Lauberg pubblicarono nel 1792 un libro, *Principii Analitici delle*

---

<sup>8</sup> Cfr. V. Flauti, *Della maniera di ordinare gli elementi di queste scienze, e dell'insegnamento de' medesimi*, con un'appendice contenente una *Esposizione del Corso di Matematiche del prof. V. Flauti*, Napoli, 1822.

<sup>9</sup> Cfr. B. Croce, *La rivoluzione napoletana del 1799. Biografie – Racconti – Ricerche*, Bari, Laterza, 1968 (I ed. 1887-1896), nuova ed. Napoli, Bibliopolis, 1999; F. Palladino, *Metodi matematici e ordine politico. Lauberg Giordano Fergola Colecchi. Il dibattito scientifico a Napoli tra illuminismo rivoluzione e reazione*, Napoli, Jovene, 1999. V. Cuoco, *Saggio sulla rivoluzione di Napoli*, a c. di A. De Francesco, Lacaita, 1998; A. Maria Rao, *La Repubblica napoletana del 1799*, Roma, Newton Compton, 1997.

<sup>10</sup> Probabilmente stampato in proprio dall'autore, non porta indicazione di editore, data e luogo.

<sup>11</sup> Cfr. R. Mazzei, *Vincenzo De Filippis*, Roma, Gangemi, 1991.

<sup>12</sup> Cfr. F. Amodio B. Croce, *Carlo Lauberg ed Annibale Giordano prima e dopo la rivoluzione del 1799*, "Archivio Storico per le Province Napoletane", XXIII (1898), fasc. I.

*Matematiche*<sup>13</sup>, nella cui prefazione esponevano le ragioni della loro convinta adesione all'approccio analitico della filosofia e delle scienze. Sostenevano che poiché tutte le cose del mondo fisico e di quello metafisico erano connesse con ordine analitico, il modo più naturale e più semplice per giungere alla loro conoscenza era di partire dalle più semplici sensazioni per giungere poi "ad espressioni e formule generalissime". Conseguentemente l'unica via capace di "promuovere la pubblica educazione ed estirpare i vecchi pregiudizi" era l'analisi. Il metodo analitico, data la semplicità della sua applicazione, rendeva lo studio delle scienze facile e accessibile a tutti. Laddove, infatti, la sintesi presentava la realtà come una "congerie di verità isolate", l'analisi riuniva le singole problematiche in questioni generalissime da affrontare con mezzi semplici ed efficaci.

"Tali considerazioni – scrivevano gli autori - ci han fatto riguardare come non degne dell'educazione, che devesi all'uomo, le Istituzioni di Matematica e Filosofia compilate col metodo sintetico; esse formano piuttosto la storia delle verità, che l'esposizione dei metodi d'invenzione, che hanno contribuito allo sviluppo dello spirito umano".

È bene sapere che uno dei due autori di questo scritto, Annibale Giordano, era stato tra i più brillanti allievi di Fergola. A soli sedici anni, nel 1783, aveva risolto con un uso elegante del metodo sintetico il difficile problema di Cramer di *Inscrivere in un cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati*, proponendone anche un'interessante generalizzazione al caso in cui invece di un cerchio si considerasse una conica qualsiasi. Fu questa soluzione che fece scoprire ai matematici francesi la scuola sintetica napoletana. Lazare Carnot ne parlò nella sua *Géométrie de position* in questi termini:

"Ottajano, à l'âge de 16 ans, trouva non seulement une solution synthétique extrêmement elegante de ce Problème, mais il lui donna toute la généralité possible, en l'appliquant aux polygones inscrits d'un nombre quelconque de côtes."<sup>14</sup>

Lo stesso Fergola aveva voluto onorare l'allievo presentandone la soluzione all'Accademia delle Scienze di Napoli, e facendola poi pubblicare nel I volume delle Memorie del 1788. E ancora per iniziativa di Fergola che, nel 1789, Giordano fu nominato professore dell'Accademia militare e poi ammesso all'Accademia delle Scienze. Sembra allora incredibile che Giordano si fosse allontanato dalla scuola del maestro per abbracciare teorie e seguire vie metodologiche da quello tanto avversate. Certamente a dividere i due fu la forte passione politica nutrita da Giordano per la causa rivoluzionaria, laddove, invece, Fergola rimase sempre fedelmente legato al carro borbonico. Nel 1794

<sup>13</sup> Cfr. *Principii Analitici della Matematiche di Annibale Giordano e Carlo Lauberg*, in Napoli, presso Gennaro Giaccio, 1792, in due volumi (I Aritmetica, II Geometria).

<sup>14</sup> Cfr. L. Carnot, *Géométrie de position*, Paris, de l'imprimerie de Crapelet, chez J. B. M. Duprat, 1803, p. 383. Carnot confuse il luogo di nascita di Giordano, Ottaviano, con il suo nome.

Giordano fondò un *Club dei Giacobini* e poi il *Lomo*<sup>15</sup>. Per un fallito tentativo rivoluzionario patì il carcere di Castel dell'Ovo dal quale tentò la fuga lasciandosi cadere in mare da una finestra, ma catturato fu processato, condannato a 20 anni di reclusione e rinchiuso nel castello de L'Aquila. Fu liberato dalle truppe francesi alla fine del 1798 e con queste entrò in Napoli il 23 gennaio 1799 e contribuì a proclamare la Repubblica Partenopea.

Erano stati gli ideali rivoluzionari ad avvicinare Giordano alle novità culturali provenienti dalla Francia. Davanti agli occhi dei giovani intellettuali che, come Giordano condividevano gli ideali della rivoluzione francese, le teorie matematiche di Lagrange, quelle chimiche di Lavoisier, quelle evoluzionistiche di Lamarck si presentavano come il prodotto più autentico della scienza illuministica. Il dualismo sintesi-analisi costituì allora la contrapposizione tra antico e moderno, tra conservazione e innovazione, tra reazione e rivoluzione.

Sebbene la Repubblica Napoletana del 1799 avesse avuto vita molto breve perché si potessero realizzare mutamenti strutturali nell'organizzazione della vita scientifica napoletana, paradossalmente la sua disfatta diede una svolta decisiva alla matematica napoletana. Gli esiliati napoletani a Parigi, entrati in contatto con i più rinomati analisti francesi, ebbero modo di conoscere ed apprendere metodi e teorie nuove, quali la geometria delle coordinate e la meccanica analitica. Abbiamo in merito due testimonianze assai significative; la prima è offerta da Luigi Telesio che, nel 1830 scriveva:

“Occorse allora che dimoravano qui i Francesi che, alcuni i quali nel novantanove dello scorso secolo cacciati in esilio e che per occasion così fatta soggiornando qualche mese in Parigi, videro forse due o tre fiato da lungi e col cannocchiale Lagrange il Signor Monge, Laplace; divisando seco che gli sfavillanti occhi loro vibrassero raggi da illuminare le annuvolate menti di que' che li guatavano immobili e stupefatti! Rimpatriati essi di nuovo, cominciarono a borbogliare da prima, poi ad asserire con franchezza, che la scuola del Fergola disposta tutt'alla sintesi degli antichi, conosceva ben poco l'analisi de' moderni calcolatori”<sup>16</sup>.

Non può sfuggire il tono sarcastico e sprezzante usato da Telesio nei confronti degli *analitici* che avevano avuto l'ardire di offuscare l'immagine della scuola di Fergola. Telesio, legato al carro borbonico non meno che il suo maestro Fergola di cui stava scrivendo l'elogio, non aveva nascosto i suoi sentimenti di profonda avversione per la rivoluzione repubblicana del '99 e per le conseguenze che essa aveva avuto nella diffusione di opere matematiche che contrastavano con gli ideali della scuola sintetica napoletana.

“Procedea sì gloriosamente al suo cammino la nobile scuola, - scriveva ancora Telesio - quando d'improvviso la desolatrice bufera fin dal 1789 in Parigi levata, venne nel 1799

---

<sup>15</sup> Il *Lomo* (libertà o morte) fu fondato nel successivo mese di febbraio con lo scopo di fare la rivoluzione per ottenere garanzie di libertà sotto un governo monarchico rappresentativo.

<sup>16</sup> L. Telesio, *Elogio di Niccolò Fergola scritto da un suo discepolo*, Napoli, Trani, 1830, p. 102.

del secolo già passato a travagliare in un tratto la nostra Napoli [...] fu perciò allora costretto il tranquillo uomo a mandar via la sua particolare e fiorita accademia”<sup>17</sup>.

La rivoluzione del '99, tra le altre cose nefande, aveva causato la chiusura della scuola di Fergola, la fine dell'egemonia incontrastata dei metodi da essa propagandati e l'introduzione a Napoli di *libricoli e scritti empî, mal dettati e oscuri*.

“Quindi caddero in mano de' giovinetti mille e mille istituzioni, tali da fargli correre infallibilmente pericolo di guastarsi l'animo, apprendendo principi non buoni e una maniera di raziocinare strana in tutto ed erronea. E per non dipartirne dal mio soggetto, basterà sovvenirsi di quella del Francoeur, che ha il titolo “Cours Complet de Mathematiques Pures, dedié a S. Alexandre I<sup>er</sup> Empereur de toutes les Russies. Ho rammentato questa, essendo questa stata che più delle altre abbraccino la maggior parte dei maestri, sebbene sparsa da per tutto di abbagli gravi e perniciosi”<sup>18</sup>.

Ben diversamente si esprimeva, invece, Bernardo Scotti Galletta, un convinto assertore del metodo delle coordinate, che così descriveva l'introduzione a Napoli delle opere degli analisti francesi:

“Molti professori Napolitani, fra i quali il chiarissimo professore D. Filippo Maria Guidi, cacciati in esilio, si ricoverarono a Parigi, ove ebbero la bella sorte di conversare con Lagrange, Laplace, Poisson, Lacroix e tanti altri rinomatissimi analisti. Videro con loro cordoglio che mentre appo noi si dava il titolo di sommo Geometra a colui, che avesse saputo scindere da una parabola Apolloniana co' metodi dei Geometri della Grecia una data area per mezzo di una retta assogettata a passare per un dato punto<sup>19</sup>; che mentre in Napoli non erasi alcuna scuola di Calcolo Differenziale ed Integrale, che mentre in Napoli s'ignorava finanche il nome di Geometria a due e tre coordinate, colà il genio de' notevoli Geometri sottoponeva tutte le leggi, onde natura governa la materia, al vasto impero dell'analisi, dando in tal modo alle matematiche quello altissimo scopo, per lo quale furono dal Creatore all'uomo largite. Rimpatriati questi colla fiaccola della moderna analisi, e colle opere dei sullodati analisti, le quali sono tanti Soli nel vasto firmamento matematico, si sforzarono di diradare quelle tenebre tanto dense, che poteano palparsi, e che per un radicato fanatismo per gli antichi ingombravano il bel cielo di Napoli. Or tutti questi professori, a' quali Napoli dee saper molto grado, vengono così insultati da codesto scolaro, il quale tutt'altro apprese dal moderatissimo e dottissimo suo maestro, fuorché matematica e moderazione”<sup>20</sup>.

<sup>17</sup> *Ibid.*, p. 82.

<sup>18</sup> *Ibid.*, p. 90.

<sup>19</sup> Questo problema fu risolto in modo spedito e elegante con l'analisi lagrangiana da Fortunato Padula che così intese dimostrare la superiorità di detto metodo nei confronti di quelli degli antichi (cfr. F. Padula, *Raccolta di problemi di geometria risolti con l'analisi algebrica*, Napoli, Stamperia del Fibreno, 1838).

<sup>20</sup> B. Scotti Galletta, *Osservazioni critiche su la Scuola Sintetica Napoletana*, Napoli, Dalla Tipografia dell'Ariosto, 1843.

Lo scolaro di cui Scotti Galletta parla è proprio Luigi Telesio che, nell'accanita difesa di Fergola e della sua Scuola, non risparmiò ingiurie e maldicenze per i suoi avversari analisti, laddove, invece, lo stesso Scotti Galletta dimostrò ammirazione e rispetto per Fergola, accusato da lui unicamente di non aver conosciuto l'analisi dei moderni e quindi di non averla potuta comprendere e apprezzare.

“Questo grand'uomo – scriveva – avea talmente approfondite le opere degli antichi Geometri, che le aveva a sé trasfuse e convertite in succo e sangue, e però ei non pensava, non iscrivea, e saremmo per dire, non sognava, se non come i grandi modelli dell'antichità sui quali erasi di buon'ora formato”.

Troppo compreso dalla geometria degli antichi Fergola non si era accorto che altrove la geometria stava seguendo altre vie che le consentivano progressi prima impensabili. Scotti Galletta diceva a chiare lettere che il difetto di Fergola era stato quello di non ritenere vera geometria le applicazioni dell'algebra alla geometria. La geometria analitica era stata da questo riguardata come “l'innesto di due scienze infra loro eterogenee” delle quali la prima alterava la purezza della seconda laddove, invece, l'algebra faceva “parlare la geometria col proprio linguaggio”. Il linguaggio algebrico dell'analisi dei moderni era “esteso, facile ed intellegibile” a chiunque. Pochi anni erano trascorsi dalla sua prima diffusione a Napoli e già si vedevano palpabili i notevoli progressi della matematica napoletana. Quando la *Scuola sintetica* di Fergola imperava incontrastata, l'insegnamento impartito ai giovani non andava oltre lo studio delle coniche. Chi voleva studiare il calcolo differenziale e integrale non trovava a Napoli una scuola e doveva rivolgersi altrove. Di conseguenza, anche lo studio della meccanica era limitato all'esposizione dei metodi classici newtoniani dal momento che si ignoravano le opere analitiche di Lagrange, Laplace, Lacroix ecc.

Diversa era la situazione nelle scuole degli analitici sorte nel clima rivoluzionario di fine secolo e che trovarono modo di affermarsi soprattutto nel periodo bonapartiano. In esse si studiavano tutte le matematiche pure e applicate; lo studio del calcolo differenziale e integrale era diventato usuale e quello della meccanica si faceva seguendo i nuovi e moderni metodi analitici al pari di ciò che accadeva in altri paesi d'Europa. Perché allora i sintetici parlavano di arretramento della matematica napoletana? Scotti Galletta rigettava le loro affermazioni secondo le quali lo stato delle matematiche a Napoli andava sempre più peggiorando e che dalle scuole degli analisti non uscivano giovani preparati e capaci come lo erano quelli della scuola di Fergola. Si trattava di accuse gratuite che nascevano oltre che dall'astio che i sintetici sentivano nei confronti degli analisti avversari, dalla loro ignoranza dei metodi della moderna analisi lagrangiana.

Per dimostrare che Fergola e i suoi allievi erano prevenuti nei confronti della geometria delle coordinate, Scotti Galletta ripercorreva i vari luoghi del

*Trattato analitico* del Fergola<sup>21</sup> e di opere degli altri allievi in cui questi autori avevano esplicitamente dichiarato che nei suddetti casi la geometria analitica dei moderni avrebbe richiesto lunghi e complessi calcoli se, addirittura, non avrebbe completamente fallito. Egli dimostrava, di contro, come agevolmente e velocemente, con pochi passaggi algebrici, si trovavano le soluzioni richieste.

L'analisi lagrangiana dunque ebbe i suoi estimatori a Napoli già nell'ultimo decennio del XVIII secolo. Tuttavia, una vera e propria scuola di analisti che potesse competere con quella dei sintetici ereditata da Flauti, si ebbe soltanto intorno al 1820, per merito di Francesco Paolo Tucci e Salvatore De Angelis. In questa scuola si impartiva un corso triennale. Al 1° anno, De Angelis insegnava Geometria piana e solida, Aritmetica e Algebra fino alle equazioni di 2° grado. Al 2° anno, Tucci insegnava Complementi di Algebra e parte del Calcolo, mentre De Angelis teneva corsi di Trigonometria, e di Analisi a 2 e 3 coordinate. Al terzo anno, De Angelis insegnava Meccanica, e teneva un corso complementare di Idraulica seguendo il testo di Venturoli<sup>22</sup>; Tucci insegnava Complementi di Calcolo e Geometria descrittiva. I libri che si adottavano erano l'Aritmetica di Amante, la Geometria di Legendre<sup>23</sup>, la Geometria analitica e l'Algebra di Lacroix (quest'ultima tradotta e annotata da De Angelis)<sup>24</sup>; per il Calcolo si adottò inizialmente il testo di Navier<sup>25</sup> sostituito poi da uno dello stesso Tucci<sup>26</sup>; per la Meccanica, il già citato libro di Venturoli, e per la Geometria descrittiva quello di Lacroix, che fu poi tradotto da Tucci e De Angelis.

La *Scuola degli analisti* di Tucci e De Angelis guadagnò in breve tempo molto credito fino a minacciare il primato della scuola sintetica guidata da Vincenzo Flauti.

## 2 - LA SFIDA MATEMATICA DEL 1839

Nel 1838 si verificò un avvenimento che, nel giro di pochi anni, doveva provocare una svolta decisiva nella vita matematica napoletana. Fortunato Padula giovane esponente della scuola analitica, pubblicò una Raccolta di

<sup>21</sup> N. Fergola, *Trattato analitico delle sezioni coniche*, Napoli, Fratelli Chianese, 1814.

<sup>22</sup> G. Venturoli, *Elementi di meccanica e d'idraulica*, 3ª ed., Milano, Giusti, 1817-18.

<sup>23</sup> Cfr. A.M Legendre, *Elements de Géométrie*, edito per la prima volta nel 1794 e che ebbero numerose altre edizioni in varie parti d'Europa. Nel 1853 Errico De Angelis, figlio di Salvatore ne pubblicò a Napoli una traduzione in italiano col titolo: *Elementi di Geometria di A.M. Legendre con note dello stesso, riveduti intieramente e corredati da copiose note e aggiunzioni per E. De Angelis*, Napoli, Stamperia del Fibreno, 1853.

<sup>24</sup> Cfr. *Elementi di algebra: per uso della Scuola Centrale delle Quattro-Nazioni di S.F. Lacroix; tradotti sulla tredicesima edizione di Parigi e corredati di annotazioni e di aggiunte di Salvatore De Angelis*, Napoli, presso Saverio Starita, 1835.

<sup>25</sup> Cfr. C.L.M.H. Navier, *Resumé des leçons d'analyse données a l'Ecole Polytechnique par m. Navier; suavi de notes par J. Liouville*, Paris.

<sup>26</sup> F. P. Tucci, *Elementi di Calcolo differenziale e di Calcolo integrale scritti principalmente per gli alunni del R. Collegio Militare*, Napoli, Tipografia Militare, 1850.

problemi di geometria risolti con l'analisi algebrica<sup>27</sup> col dichiarato intento di dimostrare come l'analisi fosse in grado di fornire agevolmente, non solo la soluzione dei problemi, ma anche la loro costruzione geometrica. Quest'ultima fase era generalmente omessa dagli analisti i quali ritenevano risolto il problema una volta che ne fossero state determinate le soluzioni per via algebrica. I sintetici, invece, attribuivano tale omissione ad una intrinseca incapacità, o tanto meno a difficoltà proprie del metodo analitico di fornire la dovuta costruzione. La Raccolta di Padula, in effetti, costituiva un'ineffabile prova della completezza del metodo analitico algebrico; in più, riguardando problemi già precedentemente risolti per via sintetica, proponeva un confronto tra i due metodi che, per l'occasione, doveva rivelare a quanti avevano fino ad allora praticato l'arte analitica, l'efficacia e la speditezza del procedere per algebra. L'apprezzamento pressoché unanime tributato alla Raccolta del Padula fece guadagnare molti punti alla scuola analitica a discapito di quella sintetica. Fu allora che Flauti capì che solo una pubblica affermazione della superiorità della sintesi geometrica sull'analisi algebrica avrebbe potuto ristabilire le distanze tra la sua scuola e quella analitica di Tucci e di De Angelis. Così, nell'aprile del 1839, sotto l'egida dell'Accademia delle Scienze, bandì un concorso a premio fra i matematici del Regno delle Due Sicilie, Programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica<sup>28</sup>, su tre difficili questioni geometriche, il cui scopo dichiarato era di "valutare l'energia o i difetti di ciascun metodo geometrico"<sup>29</sup>. In vero Flauti mal celava la sua vera intenzione di poter dimostrare, con una opportuna scelta dei quesiti, che esisteva una sola via realmente abilitata alla risoluzione dei problemi geometrici, quella che faceva uso dei metodi propri della geometria euclidea e della geometria cartesiana. Egli, che non aveva alcun dubbio circa il favorevole esito del

---

<sup>27</sup> Napoli, Stamperia del Fibreno, 1838.

<sup>28</sup> Cfr. *Considerazioni generali su tre difficili problemi e sul modo di risolverli lette alla R. A. delle Scienze di Napoli in agosto 1839*, parte I, p. 3., in V. Flauti, *Produzioni per il Programma di tre quistioni geometriche proposto da un nostro professore*, In Napoli, 1840. Si tratta di un grosso volume costituito dalle seguenti parti recanti ciascuna una sua propria numerazione: *Dichiarazione per presente ristampa del Programma.*, le già citate *Considerazioni generali*, *Al I quesito del Programma Risposta di Nicola Trudi*, *Al II quesito del Programma Risposta di Nicola Trudi* (queste con un'unica numerazione), *Problema fondamentale per le polari coniche reciproche, geometricamente risoluto, da N. Trudi*, *Su i poligoni inscritti alle curve coniche con date condizioni, ricerche di N. Trudi*, *Il problema d'inscrivere in una curva conica un poligono co' lati tendenti a punti dati, risoluto in più modi da N. Trudi*, *Riflessioni sulle precedenti soluzioni*.

<sup>29</sup> Di questo concorso si è già interessato Federico Amodeo che, nell'adunanza dell'Accademia Pontaniana del 18 giugno 1920, lesse la *memoria Vincenzo Flauti e la sfida matematica ai matematici napoletani*, inserita negli Atti dell'Accademia Pontaniana (L/XXV -1920- pp. 113-141) e riprodotta integralmente, senza modifica alcuna, nel v. II della sua *Vita matematica napoletana*, cit. pp. 164-192. Il testo della memoria consta di 28 pagine, ma di queste poco più di 5 riguardano la "sfida". Le restanti pagine sono dedicate a Flauti e alla sua attività matematica. Per quanto concerne la "sfida", Amodeo si limitò a descrivere le vicende che indussero Flauti a bandirla, a raccontare come scelse i quesiti e quali furono gli esiti.

concorso, affidava il compito di dimostrare la superiorità della scuola sintetica napoletana al suo allievo Nicola Trudi.

I temi proposti erano i seguenti:

1) “*Esibire la corrispondente convenevole costruzione geometrica della soluzione analitica data dal de la Grange del problema di: Inscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati non dipartendosi affatto da quei medesimi principi da quel sommo analista stabiliti, per pervenire all’equazione finale del medesimo e compierne poi, con gli stessi principi la dimostrazione analitica*”.

2) “*Inscrivere in un triangolo dato di specie e di grandezza tre cerchi i quali si tocchino tra loro e tocchino i lati del triangolo*”.

3) “*Inscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere le quali si tocchino fra loro e tocchino le facce della piramide*”.

Di quest’ultimo quesito si erano interessati tre volte i compilatori degli *Annales de Mathematiques* di Gergonne<sup>30</sup> e, altrettante volte avevano fatto constatare che si trattava di un problema più che determinato ed in generale impossibile<sup>31</sup>. Tale circostanza era stata rilevata anche da Jacob Steiner, nel 1826<sup>32</sup>, ma, evidentemente Flauti non ne era a conoscenza<sup>33</sup>. In più, prima che scadessero i termini previsti dal bando del concorso, l’8 maggio 1839, sul giornale napoletano *Omnibus*, un anonimo matematico fece osservare la particolare natura del problema proposto, inferendo un colpo non indifferente alla fama di Flauti. Questo fatto fece decidere all’Accademia delle Scienze di eliminare il terzo quesito dal concorso.

Nell’introdurre il suo *Programma* Flauti aveva scritto:

“La scienza del matematico non è riposta nella pura e semplice conoscenza delle verità che la costituiscono, ma in quella de’ metodi di essa”<sup>34</sup>.

Ed in realtà, dalla lettura dei temi, si evince facilmente che questi erano stati scelti in modo da consentire di valutare, non tanto le conoscenze dei matematici chiamati ad affrontarli, quanto l’efficacia dei metodi da essi adoperati. Flauti

<sup>30</sup> Cfr. *Annales de Mathematiques pures et appliquées Recueil périodique rédigé par J.D. Gergonne et J.E. Thomas Lavèrède*, Nîmes, t. I (1810), p. 196 (qui Gergonne scriveva esplicitamente “on peut proposer d’inscrire à un tétraèdre donné quelque quatre sphères, de manière que chacune d’elles touche les trois autres, et trois faces du tétraèdre”); t. II (1811), p. 287 e t. III (1812), p. 298.

<sup>31</sup> Un problema è più che determinato quando in esso sono date più condizioni di quante sarebbero necessarie per determinarlo; in tal caso, se le condizioni eccedenti sono già comprese nelle prime, queste possono essere trascurate e il problema risulta determinato; ma se dette condizioni sono in opposizione con le altre, allora il problema è impossibile.

<sup>32</sup> Cfr. J. Steiner, *Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen (18 Heft 2)*, “Journal für Mathematik”, t. I (1826), noto anche come *Journal de Crelle*.

<sup>33</sup> “Un tal problema, non mai proposto, - scriveva Flauti a p. 14 del suo *Programma* - e tentato da altri, per quant’è nostra notizia, potrà venir risolto col metodo degli antichi, con l’analisi Cartesiana, o con quella a tre coordinate.

<sup>34</sup> V. Flauti, *Programma*, cit., p. 3.

non faceva mistero che, riguardo alcuni metodi, bisognava addirittura stabilire se fossero abilitati o meno alla risoluzione dei problemi geometrici. Il riferimento in particolare era al metodo analitico algebrico col quale, a suo dire, i moderni geometri erano soliti ridurre la risoluzione di un problema geometrico a puro calcolo, spesso perdendo di vista il vero fine della questione trattata, cioè la costruzione di figure. Il confronto proposto dal concorso doveva dirimere definitivamente la questione e sancire, secondo gli auspici di Flauti, la superiorità del metodo degli antichi su quello dei moderni geometri. Ed è singolare che, mentre altrove, soprattutto in Francia, dove pure una tale discussione aveva diviso *sintetici* ed *analitici*, si andava sempre più affermando la convinzione che un confronto tra i due metodi non aveva senso perseguendo ciascuno di essi finalità differenti, a Napoli si rinfocolava l'annosa diatriba, iniziata nella seconda metà del secolo XVII tra cartesiani ed anticartesiani, circa i limiti dell'accettabilità di una soluzione puramente algebrica per un problema geometrico<sup>35</sup>. Allora i *sintetici* avevano sostenuto che il metodo analitico, non solo fosse privo di fondamenti certi, ma, per giunta, fosse incapace di esibire tutte le fasi richieste per la soluzione di un problema geometrico. Gli *analisti*, di contro, respingendo queste accuse, avevano affermato che la fondatezza del metodo era dimostrata dalla capacità dello stesso di fornire finalmente risposte a questioni mai risolte dalla pura geometria, o che comunque, con la sintesi geometrica, avevano richiesto soluzioni laboriose e prolisse. Inoltre avevano portato come esempio le nuove prospettive che, grazie all'analisi lagrangiana, si andavano aprendo alla matematica in ogni parte d'Europa. Ora Flauti riproponeva al centro della discussione una questione sulla quale in passato si erano espressi matematici di primo piano come Viète, Descartes, Leibniz: quali dovevano essere le fasi della compiuta risoluzione di un problema. La prima era quella di decidere se il problema fosse *determinato* o meno, tenendo presente quanto aveva stabilito Pappo, cioè che "Determinatio est, quae declarat quando et qua ratione, et quot modis problema fieri possit"<sup>36</sup>. Una volta stabilito che il problema era determinato, dovevano seguire tre successive fasi, nessuna delle quali poteva essere omessa: la *risoluzione*, la *composizione* e la *costruzione* dello stesso. Gli antichi geometri avevano giudicato questa via l'unica realmente legittimata alla risoluzione di problemi geometrici. Essi ritenevano, infatti, che la sola analisi (*resolutio*) non fosse efficace a un tale scopo, perché se essa era adatta all'*invenzione* non lo era per la dimostrazione. Pappo aveva sancito che la *resolutio* solo se seguita dalla *compositio* diveniva metodo legittimato alla risoluzione dei problemi geometrici. Condotta in questo senso l'analisi conservava il "vero sapore geometrico" essendo essa non disgiunta dalla sintesi, ovvero da quel procedimento che conduceva alla effettiva interpretazione geometrica dei risultati precedentemente trovati. E se l'autorità

<sup>35</sup> Cfr. R. Gatto, *Il Cartesianesimo matematico a Napoli*, cit.

<sup>36</sup> Cfr. Pappo Alessandrino, *Mathematicae Collectiones a Federico Commandino urbinatense in Latinum conversae, et Commentarijs illustratae*, Pisauri, apud H. Concordiam, 1588, Lib II, p. 21.

degli antichi geometri non fosse stata sufficiente ad avvalorare un tale punto di vista, Flauti ricordava che anche tra i geometri moderni c'era stato chi, come Lazare Carnot, aveva fatto osservare che

“La multiplicité des succès de l'analyse, et le sceau de l'evidence apposé successivement par cell-ci à toutes le découvertes de la première, ont mis hirs de doute la certitude de ces procédés. Mais lors des premiers essais de cette méthode d'invention, on dut être fort circonspect, et l'on n'osa mettre au jour les decouvertes operées par son moyen, qu'après les avoir fait passer par l'épreuve de la synthèse”<sup>37</sup>.

Se l'analisi algebrica era metodo efficace all'invenzione non lo era altrettanto per la dimostrazione; per questo essa doveva essere necessariamente seguita dalla sintesi. In realtà, come abbiamo già detto, nella *Scuola sintetica* Fergola e i suoi allievi non erano pregiudiziale chiusi nei confronti dell'analisi cartesiana, anzi la adoperarono ampiamente. Ne fecero, però, un uso strumentale e non fine a se stesso, come avevano fatto i cartesiani. Essi ammettevano l'analisi algebrica cartesiana come *resolutio* di un metodo risolutivo nel quale essa doveva essere seguita necessariamente da una *compositio* sintetica che permettesse di interpretare in termini geometrici la soluzione algebrica trovata. D'altra parte, i *sintetici* ricordavano che era stato proprio questo lo spirito di Descartes che a chiare lettere aveva dichiarato che allora si poteva ritenere risolto un problema quando ne fosse stata data la costruzione geometrica. Inoltre facevano notare che l'analisi cartesiana, nel risolvere i problemi, procedeva utilizzando i teoremi della geometria elementare. Essa dunque era legittimata dalla fondatezza di teoremi già dimostrati veri da Euclide.

Flauti allora non dubitava che si potesse “ordire ad un'analitica soluzione la corrispondente costruzione”<sup>38</sup>; nutrivà però perplessità che, essendo in tal caso il problema risolto da equazioni e, risultando queste spesso formalmente piuttosto complicate, la conseguente costruzione diveniva “opera più difficile della stessa soluzione” tanto da far desistere gli analisti dal produrla. I termini del vecchio scontro tra *analisti* e *sintetici* si erano dunque spostati. Non si trattava qui discutere se l'analisi algebrica lagrangiana possedesse o meno solidi fondamenti per essere legittimata quale metodo da usare in geometria, ma di stabilire se essa fosse davvero conveniente alla risoluzione di problemi geometrici e utile allo sviluppo della geometria, viste le difficoltà davanti alle quali, a dire di Flauti, essa talvolta poneva i matematici. Il “corrotto gusto” dei geometri moderni di esibire la sola soluzione algebrica dei problemi era dunque un difetto imputabile al loro modo di intendere compiuta la soluzione di un problema. Se il metodo analitico algebrico appariva più rapido e sbrigativo di quello sintetico era semplicemente perché esso si limitava a mostrare la sola *resolutio*. Ma essendo

<sup>37</sup> Cfr. L. Carnot, *Géométrie de position*, cit., par. 14. Questo passo è riportato da Flauti nelle sue *Produzioni per il Programma, Note aggiunte*, (b).

<sup>38</sup> *Ibid.*, p. 34.

privo della *constructio* e della *demonstratio*, parti necessarie a produrre la costruzione geometrica dei problemi, esso finiva col fornire risposte solo parziali alla determinazione degli stessi. Di questo Flauti faceva diretta ammenda all'illustre "Signor de la Grange" il quale, col suo metodo delle coordinate, aveva ridotto la risoluzione dei problemi geometrici alla sola applicazione di formule algebriche, privandola di ogni connotazione geometrica e perdendo di vista il suo vero fine: la costruzione delle figure geometriche richieste. Per Flauti, Lagrange aveva istituito

"una maniera di trattare i problemi geometrici, incastonandone i dati e'l quesito in formole generali, dalla combinazione delle quali, eliminando anche il bisogno delle figure, dovesse risultarne quell'equazione, che menasse alla risoluzione del problema"<sup>39</sup>.

Questo era un fatto inammissibile in geometria. Se anche si fosse accolta la geometria delle coordinate come parte analitica algebrica (*resolutio*) del problema, dato il suo stesso modo di procedere e le soluzioni a cui conduceva, non si sarebbe potuto in genere ottenere la dovuta costruzione geometrica (*compositio*). Lo stesso Lagrange, che per questa via aveva risolto importanti questioni geometriche, si era limitato a eseguire la sola parte analitica, e non aveva mai esibito la costruzione delle soluzioni trovate. Non era dunque un caso che il primo dei tre quesiti invece di richiedere la diretta risoluzione del problema di *Inscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati*, esigeva la costruzione della soluzione analitica datane da Lagrange, *non dipartendosi affatto da que' medesimi principj da quel sommo analista stabiliti, per pervenire all'equazione finale del medesimo; e compierne poi, con gli stessi principj, la dimostrazione analitica*. Il quesito in esame doveva mettere alla prova le capacità degli analisti a costruire un problema già risolto per via analitica.

Si trattava di un noto problema proposto, per la prima volta nel 1742, da Gabriel Cramer a Gian Francesco Salvemini, più noto come Castillon<sup>40</sup>, e passato alla storia come *Problema di Cramer*<sup>41</sup>. Su di esso si erano esercitati gli ingegni di numerosi matematici, impegnati sia nella sua diretta risoluzione, sia anche nella ricerca di una sua generalizzazione a poligoni con più di tre lati o al caso che la curva in esame non fosse un cerchio ma una conica qualunque. La soluzione del Castillon si fece attendere oltre 34 anni. Fu solo nel 1776, infatti, che questi lesse, all'Accademia di Berlino, una sua memoria relativa al quesito

---

<sup>39</sup> *Ibid.*, p. 27.

<sup>40</sup> Dal luogo di nascita, Castiglion Fiorentino.

<sup>41</sup> Il problema traeva origine dal Problema XI Propositio CXVII del VII libro delle già citate *Collezioni Matematiche* di Pappo: "Circulo ABC positioe dato et datis tribus punctis D, E, F in recta linea, inflectere DAE, et facere BC in directum ipsi CF". In sostanza il problema chiedeva di inscrivere al cerchio assegnato un triangolo i cui lati passassero per tre punti dati allineati su di una stessa retta data. Cramer aveva sottoposto al Castillon una generalizzazione di detto problema avendo eliminato la limitazione ai tre punti di appartenere alla stessa retta.

postogli da Cramer<sup>42</sup>. Fu in tale occasione che Lagrange, venuto a conoscenza della questione, ne fornì la soluzione analitica<sup>43</sup> che ora Flauti sottoponeva all'attenzione dei matematici napoletani. Questi, non senza una certa soddisfazione, faceva osservare che Eulero, dopo aver esaminata la soluzione lagrangiana, aveva espresso perplessità e dubbi "utrum solutio analytica illustris de la Grange ad aliquam expeditam et concinnam constructionem geometricam perducatur", tanto che egli stesso aveva voluto fornirne una sua tutta geometrica<sup>44</sup>. La scelta di tale tema, dunque, appariva particolarmente mirata ad esaltare le virtù della sintesi e dell'analisi geometrica. Del problema di Cramer, ora proposto, si era avuta proprio a Napoli, nel 1787, per opera di Annibale Giordano, allora giovane allievo di Nicolò Fergola, non solo una elegante ed efficace soluzione sintetica, ma anche una generalizzazione ad un poligono qualunque<sup>45</sup>. Una soluzione che, come abbiamo visto, aveva contribuito allora a dar maggior lustro alla scuola sintetica di Fergola avendone fatto conoscere il reale valore anche fuori dei confini del regno di Napoli. Agli analisti seguaci dei metodi lagrangiani toccava dunque misurarsi anche con un tale esempio. Intanto, da oltre 60 anni, da quando cioè Lagrange aveva risolto il problema, nessuno era stato in grado di fornirne la costruzione geometrica per via analitica, cosa che ora Flauti espressamente richiedeva. In realtà il procedimento lagrangiano, come aveva fatto osservare Eulero, era alquanto intricato ed appesantito di calcoli perché lo scienziato torinese non era riuscito a ridurre a forma più semplice le equazioni che aveva trovato. Anzi egli si era limitato alla determinazione di dette equazioni senza ricavarne poi le soluzioni richieste, rendendo così più arduo il compito a chi avesse voluto riconsiderarne la trattazione per fornire la relativa costruzione geometrica<sup>46</sup>. A risultati analoghi a

<sup>42</sup> Cfr. G. F. Salvemini, *Sur un problème de géométrie plane, qu'on regarde comme forte difficile* "Nouveaux Mémoires de l'Accadémie des Sciences e Belles Lettres année 1776", Berlin 1779, pp. 265-283.

<sup>43</sup> J. L. Lagrange, *Sur une nouvelle propriété des sections coniques*, in *Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de J.A. Serret*, Paris, Gauthier-Villars, 14 tomi, 1867-1892, cfr. t. IV, pp. 335-339.

<sup>44</sup> L. Euler, *Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio*, "Acta Academiae Imperialis scientiarum petropolitanae", pro anno 1780, Pars I, Petropoli, 1783. Qui, insieme col *Problema di Cramer* Eulero risolse anche quello di Pappo.

<sup>45</sup> Il problema risolto da Giordano era esattamente: *In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati comunque di sito*, cfr. *Considerazioni sintetiche sopra un celebre problema piano e risoluzione di alquanti problemi affini*, "Memorie della Società Italiana dei XL", 1787, pp. 4-17.

<sup>46</sup> Lo stesso Flauti ricordava che "contemporaneamente all'Eulero il suo discepolo Nicola Fuss, seguendo sulle orme del suo maestro un metodo misto, ne esibì altra soluzione; e che il di lui discepolo Lexell faceva i più grandi sforzi per costruire l'equazione ottenuta da de la Grange, senza avervi potuto compiutamente riuscire" (cfr. *Considerazioni generali*, cit., p. 31). Quanto ai risultati di Fuss e di Lexell, cfr. N. Fuss, *Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini*, "Acta Academiae Imperialis scientiarum petropolitanae", pro anno 1780, Pars I, Petropoli, 1783, e A. J. Lexell, *Solutio problematis geometrici in Actis Accademicis Scientiarum Berolinensis pro anno 1776 pro Celebre Castillon propositi*, *Ibid.*, Pars posterior, Petropoli, 1784, pp. 70-90.

quelli di Lagrange era giunto Simon Lhulier che, con metodo puramente algebrico, aveva tentato di trovare una soluzione migliore di quella dello scienziato torinese<sup>47</sup>. A Lhulier Flauti riconosceva il merito di aver esteso il problema dalla considerazione del cerchio a quella di una qualsiasi conica, ma, faceva notare che il suo procedimento non era stato affatto "rigorosamente geometrico". Ben altro valore era da attribuire alla generalizzazione ad un poligono qualsiasi tutta geometrica che del *Problema di Cramer* aveva fornito Annibale Giordano. Flauti era convinto che detta generalizzazione non potesse ottenersi se non mediante la pura sintesi e che anzi, più in generale, nessuno avrebbe osato "estendere sì facilmente una soluzione geometrico-algebrica dal caso particolare al generalissimo"<sup>48</sup>. Un tentativo in tal senso era stato operato da Gergonne il quale aveva pubblicato una sua costruzione del problema di Cramer, senza per altro fornirne l'analisi, ma invitando altri a ritrovarla<sup>49</sup>. In seguito mentre due suoi allievi, François Joseph Servois e Rochat fornivano, per via sintetica, la costruzione del problema usando la parabola al posto del cerchio<sup>50</sup>, lo stesso Gergonne ne produceva una per via analitica probabilmente traendo vantaggio dalle opere dei suoi due allievi attraverso le quali era venuto a conoscenza della richiesta costruzione<sup>51</sup>. I tentativi compiuti stavano comunque a dimostrare che la costruzione analitico-algebrica del problema di Cramer era cosa possibile. La proposta di questo tema da parte di Flauti appariva dunque ben fondata. Quanto poi alle reali ragioni di tale scelta lo stesso Flauti non esitava a raccontare che

"adoperandosi validamente il mio antico allievo Nicola Trudi [...] ed essendo stati gli sforzi di esso coronati da felicissimo successo, mi venne subito in pensiero di accogliere questa circostanza per l'oggetto indicato di sopra, e costituire un premio pel programma da proporre"<sup>52</sup>.

Flauti dunque sfidava gli analisti a compiere quella costruzione che il suo allievo Nicola Trudi, campione della scuola sintetica napoletana, era riuscito a fare adoperando i metodi degli avversari. Sorgono dunque legittimi dubbi circa la imparzialità del concorso. Di fatto egli era convinto che nessuno degli analisti napoletani sarebbe riuscito nella stessa impresa, cosa che avrebbe costituito la più probante testimonianza del primato assoluto della sua scuola. Flauti però si ingannava: poco prima che scadessero i termini del concorso usciva alle stampe

---

<sup>47</sup> S. Lhullier, *Solution algèbrique du problème suivant*, "Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences e Belle Lettres année 1796" Berlin, 1799, pp. 94-115.

<sup>48</sup> Cfr. V. Flauti, *Considerazioni generali*, cit., p. 32.

<sup>49</sup> *Circonscrire à un cercle donné, un triangle qui ait les sommets de ses angles situés sur trois droites indéfinies, données de position par rapport à ce cercle* "Annales de Mathématiques", cit., t. I (1810), p. 126.

<sup>50</sup> *Ibid.*, p. 342 e pp. 337-341 rispettivamente.

<sup>51</sup> *Ivi*, p. 259. In seguito, negli *Annales*, t. VII (1817), pp. 325-334 egli forniva una nuova analisi di quella dimostrazione.

<sup>52</sup> Cfr. *Considerazioni generali*, cit., p. 34.

la *Risposta di Fortunato Padula al programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica presentato ai matematici del regno delle due Sicilie*<sup>53</sup>, nella quale il giovane analista napoletano forniva le sue soluzioni ai quesiti posti per il concorso. Queste erano accompagnate da una lunga e polemica introduzione il cui intento era di smontare il castello delle argomentazioni edificato da Flauti a sostegno della sintesi geometrica e di dimostrare di contro il valore dell'analisi algebrica della quale Padula rivendicava il primato. Prima di entrare nel vivo di detta discussione, Padula, però, mostrava il suo disappunto per l'impostazione che Flauti aveva dato al concorso. Lamentava che questi, nel discorso introduttivo premesso al suo *Programma* aveva fatto "un elogio pomposo de' metodi dei geometri antichi"<sup>54</sup> ed aveva accordato un ruolo particolare alla geometria cartesiana, unica, a suo parere, ad aver "compensato i moderni geometri della perdita de' metodi antichi"<sup>55</sup>. Di contro aveva dimostrato scarsa considerazione dell'analisi algebrica lagrangiana, tacciata di insufficienza, compiacendosi in più per i presunti fallimenti di quanti, facendone uso, avevano inutilmente tentato di fornire risposte esaurienti ai quesiti ora riproposti. Tutto ciò aveva immediatamente persuaso il giovane analista napoletano che il concorso bandito da Flauti non si poteva considerare quella gara imparziale *destinata a promuovere e comparare i metodi*, quale il suo autore avrebbe voluto far credere, ma che essa era da ritenere una vera e propria sfida. Se la consuetudine invalsa tra i matematici di porre ad altri quesiti da risolvere era da considerarsi cosa lodevole quando questi avevano lo scopo di "produrre lume ed incremento alla scienza", Padula era del parere che fosse da biasimare chi, per tale via, intendeva frenare ogni ulteriore sviluppo della scienza facendola anzi tornare indietro. Perché poi nutrire una tale avversione nei confronti dell'analisi lagrangiana? Padula conduceva una lunga e meticolosa ricognizione nell'universo matematico per mostrare i limiti oggettivi della geometria degli antichi, incapace di per sé di far fare alla matematica quelle conquiste che, solo grazie all'apporto dell'analisi e dei metodi algebrici, aveva recentemente conseguito. La geometria degli antichi era rimasta allo stato originario e non era riuscita ad acquisire le capacità necessarie per generalizzare i problemi, per poterli adeguatamente classificare e ridurre a precisi schemi risolutivi. Gli antichi, diceva Padula, "si contentavano di risolverli nel senso dell'enunciazione"<sup>56</sup>. Se solo si fosse tenuto presente a quante importanti scoperte avevano condotto, e in quanto poco tempo, i metodi della geometria analitica, quelli della descrittiva e quelli dell'analisi infinitesimale, non diretti all'indagine di singole questioni, ma alla risoluzione di problematiche di

<sup>53</sup> Napoli, Stamperia del Fibreno, 1839.

<sup>54</sup> *Ibid.*, p. VI.

<sup>55</sup> *Ivi.*

<sup>56</sup> *Ibid.*, p. XII.

carattere generale entro cui facilmente si potevano trovare quelle particolari, ed a sviluppare intere teorie,

“sarà giuocoforza il concludere - diceva testualmente Padula - che la Geometria presso gli antichi era molto imperfetta. Sicché conveniamo finalmente non aver posseduto gli antichi geometri alcun metodo propriamente detto, ed aver tutto trovato a forza di profonde e lunghe meditazioni, e quasi alla ventura, siccome saggiamente giudicò il sullodato Cartesio”<sup>57</sup>.

Era stato il sistematico uso dell'algebra a dotare la geometria di metodi generali, idonei a far scoprire *a priori* la natura dei problemi, a mostrarne le affinità, i rapporti di dipendenza, a risolverli e costruirli velocemente traducendoli in equazioni. Solo introducendo l'algebra nello studio della geometria, infatti, i geometri avevano ricavato regole fisse e inequivocabili che avevano consentito loro di risolvere agevolmente problemi le soluzioni dei quali gli antichi, procedendo a *tentone*, avevano trovato a fatica con lunghe meditazioni e solo dopo aver enunciato e dimostrato serie più o meno lunghe di teoremi. Gli analisti, possedevano ora metodi generali e sicuri che consentivano loro di perfezionare e aggiungere nuovi capitoli alla geometria. Essi potevano dunque “abbandonare di buon grado a taluni sintetici l'ammasso delle loro proposizioni staccate”<sup>58</sup>. Per essi risultava quanto mai appropriato ciò che Flauti, con malcelato riferimento alla sola sintesi, aveva enunciato all'inizio del suo *Programma*, cioè che “la scienza del matematico non è riposta nella pura e semplice conoscenza delle verità che la costituiscono, ma in quella de' metodi di essa”. Quale senso dare poi all'affermazione di Flauti circa il supporto probatorio che i moderni avrebbero volutamente ricercato nei risultati degli antichi geometri? Nulla di vero. L'analisi non aveva mai avuto bisogno di legittimazioni di sorta; il suo incontrarsi con risultati della geometria classica non era considerato dagli analisti prova della sua validità; di questo essi non avevano alcun dubbio. Semmai per essi l'aver ritrovato con mezzi semplicissimi quelle cose per le quali gli antichi avevano sudato tanto, rappresentava particolare motivo di soddisfazione. Padula era disposto ad ammettere, come dicevano i *sintetici*, che molte ricerche sulla teoria delle equazioni avevano tratto la loro origine dalla geometria; questo, però, non significava che l'algebra dovesse alla geometria i motivi del suo sviluppo. L'algebra, - sosteneva -, non era propriamente una scienza in particolare, ma un metodo che consentiva di scoprire le relazioni tra le grandezze, al fine di stabilire le operazioni necessarie per determinare le incognite dei problemi.

“Quelli che si mantennero più fedeli alla geometria antica - diceva - non ebbero parte alle grandi scoperte; e i discepoli di Galilei in particolare, per non aver coltivato con impegno la nuova geometria non parteciparono all'invenzione del calcolo differenziale ed integrale, e si fecero forse sfuggir di mano la spiegazione del sistema del mondo, così

---

<sup>57</sup> *Ibid.*, pp. XV-XVI.

<sup>58</sup> *Ivi.*

bene incominciata dal loro maestro, tradendo in tal modo le speranze di lui, di Cavalieri, e dell'Accademia del Cimento"<sup>59</sup>.

Vi era tra gli antichi ed i moderni geometri una forte differenza nella considerazione della geometria e ciò ne aveva condizionato gli sviluppi. I primi riguardarono la geometria come una scienza meramente speculativa e poco si preoccuparono che essa si svolgesse con passo misurato; diversamente i moderni, consapevoli anche del ruolo da essa assunto via via all'interno di tutte le discipline fisico-matematiche, avevano avvertito la necessità di venire in possesso di metodi generali, come quelli dell'analisi algebrica lagrangiana. Padula aveva così profondamente ribaltato le posizioni espresse dal suo avversario con ragioni forti e convincenti anche se il tono polemico della sua perorazione lo aveva indotto a indubbe esagerazioni circa i meriti del proprio metodo e la pochezza dell'altro. Ma, come Flauti per l'analisi algebrica lagrangiana, egli appariva incapace di distinguere il ruolo reale che, in geometria, la sintesi aveva avuto nel passato e che ancora poteva continuare ad avere rispetto alla stessa analisi.

### 3 - LA RISPOSTA DI FORTUNATO PADULA AL PRIMO TEMA DEL *PROGRAMMA*.

Il primo passo di Padula è quello di ricostruire il procedimento analitico di Lagrange. Con riferimento alla fig. 1, detto  $r$  il raggio del cerchio e posto

$$a=OA, b=OB, c=OC$$

$$p = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AOB}}{2}, q = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AOC}}{2}, s = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AOM}}{2}, t = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AON}}{2}, v = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AOP}}{2}$$

essendo noti in ciascuno dei triangoli AON, BOP e COP due lati, l'angolo tra essi compreso e la semidifferenza degli altri due angoli, applicando il teorema delle tangenti dovuto a Neper<sup>60</sup> ottiene il seguente sistema di tre equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} st = \frac{a-r}{a+r} \\ \frac{s-p}{1+ps} \cdot \frac{v-p}{1+pv} = \frac{b-r}{b+r} \\ \frac{t-q}{1+qt} \cdot \frac{v-q}{1+qv} = \frac{c-r}{c+r} \end{array} \right. \quad (1)$$

<sup>59</sup> *Ibid.*, pp. XXVI-XXVII.

<sup>60</sup> "In un triangolo qualunque il rapporto della differenza di due lati alla loro somma è uguale al rapporto della tangente della semidifferenza degli angoli opposti a detti lati alla tangente della semisomma degli stessi angoli".



$$P \hat{O} B = \frac{\operatorname{tag} \frac{\hat{A} \hat{O} P}{2} - \operatorname{tag} \frac{\hat{A} \hat{O} B}{2}}{1 + \operatorname{tag} \frac{\hat{A} \hat{O} B}{2} \operatorname{tag} \frac{\hat{A} \hat{O} P}{2}}$$

che, con le posizioni fatte, coincide con la seconda delle (1). Analogamente si procede per la terza.

Posto  $A = \frac{a-r}{a+r}$ ,  $B = \frac{b-r}{b+r}$ ,  $C = \frac{c-r}{c+r}$  il sistema (1) si scriverà più convenientemente nel seguente modo:

$$\begin{cases} t = \frac{A}{s} \\ [s-p - Bp(1+ps)]v = B(1+ps) + p(s-p) \\ [A-qs - Cq(s+qA)]v = C(s+qA) + q(A-qs) \end{cases}$$

Eliminando  $v$  dalle ultime due equazioni si ottiene:

$$\frac{(1-Bp^2)s - p(1+B)}{p(1+B)s + B - p^2} = \frac{A(1-Cq^2) - q(1+C)s}{Aq(1+C) + (C-q^2)s} \quad (3)$$

la quale, con le posizioni fatte da Lagrange,

$$\begin{aligned} B-p^2+(1+B)pq &= F & (1+B)p-(1-Bp^2)q &= G; \\ -(1+B)p+(B-p^2)q &= H & 1-Bp^2+(1+B)pq &= K, \end{aligned}$$

fornisce l'equazione di secondo grado in  $s$  da quella trovata:

$$(CK+Gq)s^2 + [CH-AG+(CKA+F)q]s = A(F-CHq)$$

Padula definisce questa equazione "convenientissima al calcolo numerico", e giustifica la mancata costruzione geometrica dello scienziato torinese, dicendo che questo autore

"non curò di accennar la maniera di ricavare operazioni grafiche, esistendo per questo metodi generali"<sup>62</sup>.

Per mostrare come questa si possa ottenere con l'analisi lagrangiana, Padula considera il sistema di riferimento avente per assi coordinati la retta  $OA$  e la perpendicolare ad essa in  $O$ . Indica, poi, con  $\varphi$  e  $\varphi'$  rispettivamente gli angoli formati da  $OB$  e  $OC$  con  $OA$ ; pone cioè  $\varphi = \hat{A} \hat{O} B$  e  $\varphi' = \hat{A} \hat{O} C$ , per cui risulta:

<sup>62</sup> Cfr. F. Padula, *Risposta*, cit., p. 3.

$$p = \operatorname{tag} \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi}; \quad p^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi};$$

$$q = \operatorname{tag} \frac{\varphi'}{2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{1 + \cos \varphi'}; \quad q^2 = \frac{1 - \cos \varphi'}{1 + \cos \varphi'}$$

Infine sostituisce queste espressioni insieme con quelle di A, B e C nella (3), ottenendo l'equazione:

$$(a+r)[\beta\beta'+(\alpha+r)(\alpha'-r)]s^2 + \{(a+r)[\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)]+(a-r)[\beta'(\alpha+r)-\beta(\alpha'+r)]\}s = \\ = (a-r)[\beta\beta'+(\alpha-r)(\alpha'+r)] \quad (4)$$

nella quale  $\alpha = b \cos \varphi$ ,  $\beta = b \operatorname{sen} \varphi$ ,  $\alpha' = c \cos \varphi'$  e  $\beta' = c \operatorname{sen} \varphi'$ , essendo  $(\alpha, \beta)$  le coordinate di B, e  $(\alpha', \beta')$  quelle di C.

D'altra parte, poiché  $s = \operatorname{tag} \frac{\widehat{AOM}}{2} = \operatorname{tag} \frac{\omega}{2}$ , (posto  $\widehat{AOM} = \omega$ ), indicate con  $x = r \cos \omega$  e  $y = r \operatorname{sen} \omega$  le coordinate del punto M, si hanno le due espressioni:

$$s^2 = \frac{r-x}{r+x} \qquad s = \frac{y}{r+x}$$

che, sostituite nella (4) forniscono l'equazione della retta che interseca il cerchio nel punto M

$$\{(a+r)[\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)]+(a-r)[\beta'(\alpha+r)-\beta(\alpha'+r)]\}y = \\ = (a+r)[\beta\beta'+(\alpha+r)(\alpha'-r)](x-r) + (a-r)[\beta\beta'+(\alpha-r)(\alpha'+r)](x+r) \quad (5)$$

Una volta determinato M resta individuato l'angolo  $\widehat{MOA}$  la cui metà ha tangente trigonometrica uguale a s, ossia è tale che  $\operatorname{tag} \frac{\widehat{MOA}}{2} = s$ .

Al fine di costruire la (5), Padula ricorda che:

“Allorché devesi costruire l'equazione di una retta, è noto che basta assegnare due punti pe' quali debba essa passare, e per determinare questi punti il metodo generale che si dà ne' trattati di Geometria Analitica è di dare dei valori particolari ad una delle due variabili, e ricavarli quindi i valori corrispondenti dell'altra. Ma invece di assegnare ad x un valore, può anche stabilirsi tra x e y una relazione qualunque espressa con una equazione di primo grado, e determinar poi i valori di x ed y che si deducono combinando questa equazione con la proposta. Per tal guisa dal sistema di queste due equazioni possono ricavare altre equazioni più semplici, le quali tutte, perché dedotte dalla proposta, combinate insieme, si accordano a dare per x ed y i valori che soddisfano alla data equazione, e per conseguenza considerate come equazioni fra due variabili esprimono rette che s'incontrano tutte in uno stesso punto della retta cercata, e perciò,

costruendone due di esse, si viene ad assegnare con la loro intersezione un punto della suddetta retta”<sup>63</sup>.

In conseguenza di ciò, pone nella (5)

$$[\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)]y=[\beta\beta'+(\alpha+r)(\alpha'-r)](x-r) \quad (6)$$

ottenendo

$$[\beta'(\alpha+r)-\beta(\alpha'+r)]y=[\beta\beta'+(\alpha-r)(\alpha'+r)](x+r) \quad (7)$$

che, sottratta dalla (6), fornisce

$$(\beta'-\beta)y=(\alpha-\alpha')x+\alpha\alpha'+\beta\beta'-r^2 \quad (8)$$

che è l'equazione di una retta perpendicolare alla retta BC<sup>64</sup>. Per individuarne la posizione Padula ne trova la distanza  $d$  dal punto B

$$d = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - r^2}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}} = \frac{(\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - r)(\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} + r)}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$$

e fa vedere che

$$d = \frac{BR \cdot BS}{BC} \quad 65$$

Preso allora su BC il punto H tale che  $BH = \frac{BR \cdot BS}{BC}$ , la (8) rappresenta la retta HK perpendicolare a BC.

Quanto all'equazione (7), se in essa si pone  $y=0$ , si ha  $x=r$ . La (7) dunque rappresenta una retta passante per D(r, 0), avente coefficiente angolare

<sup>63</sup> Padula aggiunge che “Né ciò ha luogo per la sola retta, ma in generale quando si ha l'equazione di una curva, e vuolsi assegnare un punto di essa, invece di dare ad  $x$  un valore qualunque, e ricavarne poi quello di  $y$ , gioverà stabilire fra  $x$  e  $y$  una relazione qualunque, la quale si sceglierà in modo che renda più semplice l'equazione data, e costruendo le linee espresse dalle equazioni che, combinando la data e quella presa ad arbitrio, si ottengono, si assegneranno de' punti della curva proposta. Con questo modo, data l'equazione di un'iperbole o di una parabola, si può con l'intersezione di due rette assegnare un punto qualunque”; *ibid.*, pp. 3-4.

<sup>64</sup> Essendo B( $\alpha$ ,  $\beta$ ) e C( $\alpha'$ ,  $\beta'$ ), la retta BC ha equazione  $y-\beta = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha)$  e la (8) rappresenta

una retta di coefficiente angolare  $\frac{\alpha-\alpha'}{\beta'-\beta}$ .

<sup>65</sup> Non è difficile constatare che, detti R e S i punti di intersezione del diametro per B, essendo  $OB = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$ , è  $\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - r = BR$  e  $\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} + r = BS$ . E poiché  $\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2} = BC$ , si ha che  $d = \frac{BR \cdot BS}{BC}$ .

$$\frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2-r(\alpha-\alpha')}{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}$$

Se si indica con F il punto di intersezione della retta BC, di equazione  $y-\beta=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha)$ , con la retta per D perpendicolare alla retta OA di equazione  $x=r$ , e con K il punto di intersezione della retta per OA di equazione  $y=0$  con la perpendicolare per H a CB, di equazione  $(\beta'-\beta)y=(\alpha-\alpha')x+\alpha\alpha'+\beta\beta'-r^2$ ,<sup>66</sup> si ha che

$$\left| \frac{\frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{\alpha-\alpha'}}{\frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2-r(\alpha-\alpha')}{\alpha-\alpha'}} \right| = \frac{DF}{OK+r}$$

Prendendo allora sull'asse delle ascisse il punto K' tale che  $K'O=OK$ , la retta di equazione (6) risulterà essere la perpendicolare DL per D alla  $FK'$ .<sup>67</sup>

Allora il punto L della retta rappresentata dalla (6) appartiene anche alla retta di equazione (5). Quest'ultima, infatti, è combinazione lineare della (6) e della (7) rispettivamente mediante i coefficienti  $(a+r)$  e  $(a-r)$ .

Per determinare un secondo punto della stessa retta poniamo nella (5)  $y=0$  e otteniamo:

$$(a+r)\left(\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'-r^2}{\alpha-\alpha'}-r\right)(x-r)=(a-r)\left(\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'-r^2}{\alpha-\alpha'}+r\right)(x+r).$$

Pertanto, se si prende un punto Q tale che  $EQ:QD=AE:KE:AD:KD$ , Q è il punto di intersezione della retta di equazione (5) con l'asse delle ascisse e QL è la retta che si doveva costruire. Queste considerazioni di carattere analitico consentono a Padula di completare la risoluzione del problema, "secondo la

<sup>66</sup>  $\frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{\alpha-\alpha'}$  è l'ordinata di F, mentre  $\frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2}{\alpha-\alpha'}$  è l'ascissa di K.

<sup>67</sup> Infatti, il coefficiente angolare della (6) è  $\frac{\beta\beta'+(\alpha+r)(\alpha'-r)}{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha+r)} = \frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2-r(\alpha-\alpha')}{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha+r)}$ .

Dunque una retta ad essa perpendicolare dovrà avere coefficiente angolare

$-\frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2-r(\alpha-\alpha')}$  ed essendo  $K'\left(-\frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2}{\alpha'-\alpha}, 0\right)$  e  $F\left(r, \frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{\alpha'-\alpha}\right)$ , il

coefficiente angolare della retta  $K'F$  è:  $\frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{r+\frac{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2}{\alpha-\alpha'}} = -\frac{\beta'(\alpha-r)-\beta(\alpha'-r)}{\beta\beta'+\alpha\alpha'-r^2-r(\alpha-\alpha')}$ .

dottrina di Pappo”, con la seguente *composizione*. Tracciate le rette OA, OB e BC, e detti R e S i punti in cui la retta per OB interseca il cerchio, si stacca su CB il punto H in modo che “il rettangolo di CB in BH” risulti equivalente<sup>68</sup> “al rettangolo di RB in BS”, vale a dire il prodotto di CB per BH sia uguale al prodotto di RB per BS<sup>69</sup>. Si traccia, poi, la perpendicolare HK a BH e la perpendicolare DF ad EA e si prolunga ED fino ad un punto Q tale che il rapporto di EQ ad ED “stia in ragion composta” a quello di AE ad AD ed a quello di KE a KD, ovvero  $\frac{EQ}{ED} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{KE}{KD}$ . Si stacca quindi, sul diametro ED,

dalla parte di D un punto K' tale che  $OK=OK'$ , si unisce K' con F e su K'F, si porta la perpendicolare DL: la retta per Q e per L stacca sul cerchio due punti M e M' che soddisfano entrambi il problema<sup>70</sup>, coerentemente col fatto che, essendo l'equazione risolvente di secondo grado, due sono i triangoli che soddisfano alle ipotesi del problema.

A questo punto il problema è completamente risolto e costruito. Tuttavia, al fine di dare un'ulteriore prova “dell'inesauribile fecondità dell'Algebra”, e “mostrare che, anche senza usare particolari vedute di analisi”,<sup>71</sup> si può ugualmente e velocemente costruire il problema dato, Padula fornisce una nuova costruzione che fa scaturire direttamente da semplici considerazioni sui coefficienti dall'equazione risolvente (7). Questa, infatti, ordinata rispetto ad y ed x, può scriversi:

$$\left[ \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'} + \frac{r^2}{a} \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \right] y + \left[ \frac{r^2}{a} - \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2}{\alpha - \alpha'} \right] x = \frac{r^2}{a} \left[ a - \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2}{\alpha - \alpha'} \right] \quad (9)$$

nella quale la quantità  $\left[ \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'} + \frac{r^2}{a} \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \right]$  non è altro che il valore assunto

da y nell'equazione  $y = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} x + \frac{\alpha\beta - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'}$ , che rappresenta la retta BC della

fig. 2, quando si pone  $x = \frac{r^2}{a}$ . Se dunque si prende su OA il punto D tale che sia

$OD = \frac{r^2}{a}$  e si conduce la perpendicolare DE ad OA (E è il punto di BC

<sup>68</sup> Padula non parla di equivalenza ma di uguaglianza. In effetti pur parlando di rettangoli, egli non pensa alle figure geometriche ma alla misura delle loro superfici.

<sup>69</sup> Rettangolo noto, essendo R e S gli estremi del diametro il cui prolungamento passa per B.

<sup>70</sup> Analogamente si determinano i punti N e P. Padula fa anche notare che se fosse  $OK > OE$ , essendo A esterno al cerchio, invece di prolungare il diametro per individuare il punto Q, bisognerà dividere lo stesso nel rapporto indicato.

<sup>71</sup> Padula spiega che “le particolari osservazioni analitiche, di cui intendiamo parlare, sono in generale quelle trasformazioni che si eseguono nelle formole o nelle equazioni, e che sono proprie dell'Algebra; onde pervenire ad eleganti costruzioni geometriche”; F. Padula, *Risposta*, cit., p. 7.

individuato da detta perpendicolare), la DE è l'ordinata di E ed esprime il coefficiente di y nell'equazione (9). D'altra parte, se si indica con K il punto in cui la retta OA (asse delle ascisse) interseca la perpendicolare HK alla retta BC, dove H è il punto della stessa BC scelto in maniera tale che  $CH = \frac{RC \cdot CS}{CB}$ , la quantità  $\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2}{\alpha - \alpha'}$ , presa in valore assoluto, risulta essere uguale ad OK<sup>72</sup>.

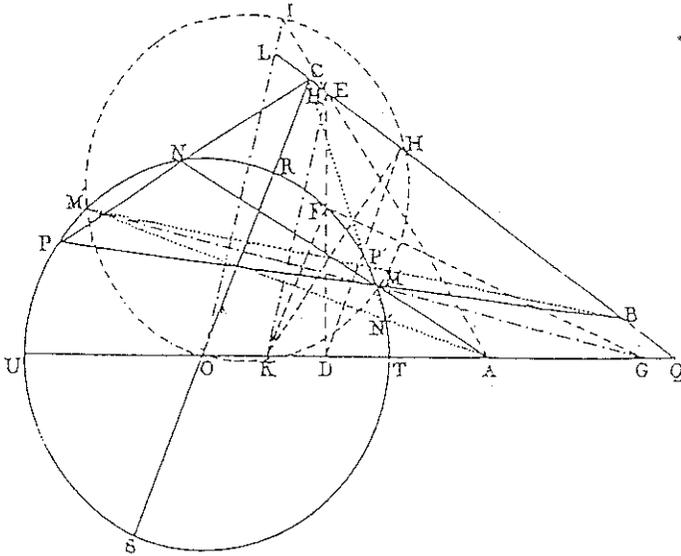


fig. 2

Essendo  $KD = OD - OK$ , sarà dunque  $KD = \frac{r^2}{a} - \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2}{\alpha - \alpha'}$ , che è il coefficiente della x nell'equazione (9). La (9) dunque è l'equazione di una retta perpendicolare alla retta EK che potrà essere facilmente costruita purché se ne assegni un punto. Se allora in essa si pone  $y=0$  si ottiene facilmente:

<sup>72</sup> Una retta perpendicolare a BC ha equazione  $(\beta - \beta')y + (\alpha - \alpha')x = \alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2$ ; la sua distanza da C è data da  $\frac{\beta'^2 + \alpha'^2 - r^2}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$ , per cui, preso H tale che  $CH = RC \cdot \frac{CS}{CB}$ , e tracciata la perpendicolare HK alla BC si ha,  $OK = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - r^2}{(\alpha - \alpha')^2}$ .

$$x = OD + \frac{FD^2}{KD^2} \quad 73.$$

Pertanto, se si traccia la retta FK, la sua perpendicolare FG incontra in G l'asse delle ascisse e la retta GMM' perpendicolare alla EK, per cui è facile far discendere la *composizione* del problema nel seguente modo. Considerate le rette OA, OC e CB, si prende su BC il punto H tale che sia  $BC \cdot CH = SC \cdot SR$ , con S e R estremi del diametro sulla retta CO. Analogamente si prende sulla retta AO il punto D in modo che sia  $AO \cdot OD = r^2$ . Condotte quindi a BC e ad OA rispettivamente le perpendicolari HK e DE, detto F il punto di intersezione di ED con il cerchio dato, si considera il segmento FK e la perpendicolare FG ad esso in F (G punto di intersezione di detta perpendicolare con la retta per OA). La retta per G perpendicolare ad EK intersecherà il cerchio nei punti M ed M' che sono i punti cercati.

Questa costruzione è indubbiamente più semplice della precedente e viene presentata da Padula come ulteriore prova delle capacità dell'analisi di esibire la *composizione* del problema con la stessa rapidità con cui era stato in grado di produrne la *risoluzione*. Ma ciò non sembra appagarlo totalmente. Suo intento è, infatti, di dimostrare che, contrariamente a quanto sostenuto dai  *sintetici*, il metodo analitico algebrico è capace di ripercorre agevolmente tutte le vie tradizionalmente battute dal metodo degli antichi<sup>74</sup> e, in particolare, è in grado di costruire l'equazione risolvente mediante l'intersezione di due cerchi. A tale scopo, considera, insieme col cerchio dato, un nuovo cerchio passante per i punti M e M',

“e poiché - dice - è nostro divisamento non seguire mai vie particolari, ma sempre metodi generali, faremo osservare che quando si hanno le equazioni di una retta e di un cerchio, e vuolsi determinare l'equazione di un cerchio che passi per i punti comuni al cerchio dato ed alla retta, basta moltiplicare l'equazione della retta per una quantità qualunque, e sottrarla dall'equazione del cerchio”<sup>75</sup>.

Se dunque  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $ny + mx = p$  sono le equazioni del cerchio e della retta, moltiplicando la seconda per q e sottraendola dalla prima si ottiene:

$$x^2 + y^2 - qny - qmx = r^2 - qp$$

che è l'equazione di un cerchio che passa per gli stessi punti comuni alla retta ed al cerchio dato. Padula mostra che, con una opportuna scelta di q, si può

<sup>73</sup> Nel triangolo rettangolo OFD, con F punto del cerchio dato, è  $FD^2 = OF^2 - OD^2 = r^2 - \frac{r^4}{a^2}$ .

<sup>74</sup> F. Padula, *Risposta*, cit., p. 9.

<sup>75</sup> *Ivi*.

rendere molto agevole la costruzione del problema. Se infatti si pone  $q = \frac{r^2}{p}$ ,  
l'equazione risultante

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{p}(ny + mx) = 0$$

è quella di un cerchio avente per diametro la retta che unisce l'origine col punto di coordinate  $\left(\frac{r^2}{p}m, \frac{r^2}{p}n\right)$  appartenente alla retta di equazione  $y = \frac{n}{m}x$  perpendicolare per l'origine alla retta data. Applicando le considerazioni precedenti al problema in esame, si vede subito che il cerchio da costruire, passante per i punti M, M' ed O, avrà centro sulla retta OI parallela alla retta KE con I  $\left(\frac{AO}{AK}KD, \frac{AO}{AK}DE\right)$ <sup>76</sup>, punto di intersezione della retta OL con il prolungamento di AE.

Come nei casi precedenti Padula fa seguire, a questo punto, la *composizione* del problema. Tracciate le rette OA, OC e CB e fatto il rettangolo di BC in CH uguale a quello dato di SC in CR, ed il rettangolo di AO in OD uguale al quadrato del raggio, e costruito l'angolo AÔL uguale all'angolo DĤQ, si disegna la perpendicolare DE alla retta AO e quindi la retta AE. Il cerchio OMI di diametro OI intersecherà quello dato nei punti M ed M'.

La costruzione dell'equazione di Lagrange, per mezzo dell'analisi algebrica, è dunque perfettamente ed esaurientemente compiuta. Padula però non mette qui termine alla sua trattazione. Egli, infatti, fa vedere rapidamente come le tre costruzioni da lui eseguite, ed in particolare la terza, si adattino perfettamente anche al caso in cui i tre punti A, B, C siano allineati (Problema di Pappo) o a quello in cui la retta NM risulti parallela a BC. La sua conclusione è molto polemica nei confronti di Flauti che aveva voluto vedere nella complessità dell'equazione risolvete un ostacolo quasi insormontabile alla costruzione del problema.

"L'eleganza e semplicità della medesima costruzione - dice Padula - superiore a quella di tutte le soluzioni che la pura analisi geometrica ha date finora del presente problema, mostra quanto s'ingannano coloro che vogliono giudicare dell'eleganza delle costruzioni, cui può condurre un'equazione, dalla lunghezza delle formole. E di questo giudizio le cose dette sul problema che abbiám risoluto ne propongono la più chiara conferma."<sup>77</sup>

<sup>76</sup> Non è difficile verificare ciò quando si tenga conto che in tale caso è  $m=KD$ ,  $n=DE$  e  $p=r^2KA/AO$ .

<sup>77</sup> F. Padula, *Risposta*, cit., p. 20.

## 4 - LA SOLUZIONE DI NICOLA TRUDI AL PRIMO TEMA DEL PROGRAMMA

Come Padula, Trudi si preoccupa innanzitutto di ricostruire il possibile procedimento seguito da Lagrange per trovare l'equazione risolvente. Il suo punto di partenza non è diverso, se non in alcune posizioni fatte da quello del giovane analista. Con riferimento alla fig. 3, suppone che MNP sia il triangolo cercato e pone

$$A=OA, B=OB, C=OC$$

$$p=\text{tag} \frac{\widehat{AOB}}{2}, \text{tag} \frac{\widehat{AOC}}{2}, x=\text{tag} \frac{\widehat{AOM}}{2}, z=\text{tag} \frac{\widehat{AON}}{2}, v=\text{tag} \frac{\widehat{AOP}}{2}$$

ed applica anch'egli il citato teorema di Neper ai triangoli AON, BOP e COP. Ottiene così un sistema di equazioni che differisce da quello di Padula solo per il fatto che al posto di  $s, t, a, b, c$ , ora compaiono  $x, z, A, B, C$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} zx = \frac{A-r}{A+r} \\ \frac{x-p}{1+px} \cdot \frac{v-p}{1+pv} = \frac{B-r}{B+r} \\ \frac{z-q}{1+qz} \cdot \frac{v-q}{1+qv} = \frac{C-r}{C+r} \end{array} \right. \quad (10)$$

Diversamente da Padula che, come abbiamo visto, risolve direttamente il suo sistema per via puramente algebrica, Trudi opera innanzitutto alcune trasformazioni che fa scaturire da considerazioni geometriche sulla figura e dall'applicazione di alcuni teoremi di trigonometria piana e di geometria elementare. Inoltre, come vedremo, per procedere alla costruzione del problema secondo i canoni dell'analisi geometrica, è costretto a dimostrare preliminarmente due lemmi, cosa che rende alquanto prolissa e laboriosa la sua soluzione.

Comincia coll'osservare che, risultando  $\widehat{POE} = \widehat{POD} - \widehat{EOD}$ <sup>78</sup>, segue che  $\text{tag} \frac{\widehat{POE}}{2} = \text{tag} \left( \frac{\widehat{POD}}{2} - \frac{\widehat{EOD}}{2} \right)$ , e che, essendo gli angoli  $\widehat{POE}$ ,  $\widehat{POD}$  e  $\widehat{EOD}$

supplementari rispettivamente agli angoli  $\widehat{BOP}$ ,  $\widehat{COP}$  e  $\widehat{COE}$ , sarà

$$\text{tag} \frac{\widehat{POE}}{2} = \frac{1+pv}{v-p} = \frac{\frac{1+qv}{v-q} \cdot \frac{q-p}{1+pq}}{1 + \frac{1+qv}{v-q} \cdot \frac{q-p}{1+pq}}$$

<sup>78</sup> E e D sono rispettivamente i punti di intersezione della circonferenza con le rette per BO e CO.



dato come cerchio trigonometrico di raggio unitario, e posto  $\frac{1+qv}{v-q} = y$  e

$\frac{q-p}{1+pq} = n$ , si ha

$$TD = \text{tag} \frac{\widehat{P\hat{O}D}}{2} = y \qquad RD = \text{tag} \frac{\widehat{E\hat{O}D}}{2}.$$

D'altra parte OT divide l'angolo  $\widehat{P\hat{O}D}$  in due parti uguali, per cui  $\frac{\widehat{P\hat{O}D}}{2} = \widehat{T\hat{O}D} = \widehat{P\hat{O}T}$ . E poiché nel triangolo rettangolo TOD,  $OD=1$ , si ha che

$$TD = \text{tag} \widehat{T\hat{O}D} = y.$$

Se allora K è il punto di intersezione della tangente in d (punto diametralmente opposto al punto D) con il prolungamento di RE, essendo il triangolo KEO rettangolo, e gli angoli  $\widehat{K\hat{O}E}$  e  $\widehat{E\hat{O}R} = \widehat{R\hat{O}D}$  complementari, si ha che

$$KE = \text{tag} \widehat{K\hat{O}E} = \text{cotg} \widehat{E\hat{O}R} = \text{cotg} \widehat{R\hat{O}D} = \frac{1}{n}.$$

Posto dunque

$$\begin{array}{lll} A-r=a & B-r=b & C-r=c \\ A+r=a' & B+r=b' & C+r=c' \end{array}$$

il sistema (10) diviene

$$\left\{ \begin{array}{l} zx = \frac{a}{a'} \\ \frac{x-p}{1+px} \cdot \frac{1+ny}{y-n} = \frac{b}{b'} \\ \frac{z-q}{1+qz} \cdot \frac{1}{y} = \frac{c}{c'} \end{array} \right. \qquad (11)$$

dal quale, eliminando x e z si ottiene l'equazione risolvente:

$$\left[ \left( \frac{c'q}{c} + y \right) : \left( \frac{c'}{qc} - y \right) \right] \left\{ \left[ y - \frac{n - \frac{pb'}{b}}{1 + n \frac{pb'}{b}} \right] : \left[ y - \frac{n + \frac{b'}{pb}}{1 - n \frac{b'}{pb}} \right] \right\} =$$

$$=(a:a') \left[ \left( \frac{pb'}{b} + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{b'}{pb} - \frac{1}{n} \right) \right] \left( p : \frac{1}{q} \right) \quad (12)$$

La costruzione di Trudi procede con la determinazione dei punti  $v$ ,  $v'$  e  $u$ ,  $u'$ , rispettivamente intersezioni delle bisettrici degli angoli  $A \hat{O} B$  e  $B \hat{O} S$  con la tangente in  $e$ , e delle bisettrici degli angoli  $A \hat{O} C$  e  $C \hat{O} S$  con la tangente in  $d$ . Si può facilmente vedere che, nei triangoli  $eOv$ ,  $eOv'$ ,  $uOC$ ,  $u'OC$ , valgono le relazioni  $ev=p$ ,  $ev'=\frac{1}{p}$ ,  $du=q$  e  $du'=\frac{1}{q}$ <sup>79</sup>. Unendo  $B$  con  $v$  e con  $v'$  e, prolungando  $Bv$  e  $Bv'$  fino ad incontrare in  $V$  e  $V'$  la tangente in  $E$ , si verifica facilmente che valgono le relazioni:  $EV=\frac{pb'}{b}$  e  $EV'=\frac{b'}{pb}$ <sup>80</sup>. Parimenti, unendo  $C$  con  $u$  e  $u'$  e prolungando  $Cu$  e  $Cu'$  fino ad incontrare in  $U$  e  $U'$  la tangente in  $d$ , sarà  $DU=\frac{qc'}{c}$  e  $DU'=\frac{c'}{qc}$ . Ed infine detti  $z$  e  $z'$  le intersezioni dei prolungamenti di  $VO$  e di  $V'O$  con la tangente in  $r$ , si avrà:

$$rz = \frac{n - \frac{pb'}{b}}{1 + n \frac{pb'}{b}} \quad rz' = \frac{n + \frac{b'}{pb}}{1 - n \frac{b'}{pb}} \quad 81$$

Sicché, staccati su  $UU'$  due segmenti  $DZ$  e  $DZ'$  rispettivamente uguali a  $rz$  e a  $rz'$ , sarà

<sup>79</sup> Nel triangolo  $eOv$  si ha che  $ev = \text{tag} \frac{A \hat{O} B}{2} = p$ . Poiché, inoltre, si può esprimere  $A \hat{O} S = 180^\circ = A \hat{O} v + v \hat{O} e + e \hat{O} v' + v' \hat{O} S$ , e poiché  $A \hat{O} v = v \hat{O} e$  e  $e \hat{O} v' = v' \hat{O} S$ , si ha che  $A \hat{O} S = 2(v \hat{O} e + v' \hat{O} S)$ , ovvero  $v \hat{O} e + v' \hat{O} S = 90^\circ$ . Applicando dunque al triangolo rettangolo  $vOv'$  il II teorema di Euclide, si ha:  $ev \cdot ev' = ev' \cdot p = 1$ , da cui  $ev' = 1/p$ . Analogamente per  $du=q$  e  $du' = 1/q$ .

<sup>80</sup>  $EV = EB \cdot \text{tag} E \hat{B} V = (B+r) \frac{\text{sen} E \hat{B} V}{\text{cos} E \hat{B} V} = b' \cdot \frac{ev}{eB} = \frac{b'p}{b}$ . E analogamente per  $EV' = b'/pb$ .

<sup>81</sup> Essendo  $E \hat{O} R = R \hat{O} D = \text{tag} E \hat{O} R = \text{tag}(E \hat{O} V + z \hat{O} v) = \text{tag} R \hat{O} D = n$ . Segue che  $\frac{\text{tag} E \hat{O} V + \text{tag} z \hat{O} R}{1 - \text{tag} E \hat{O} V \cdot \text{tag} z \hat{O} R} = \frac{\frac{pb'}{b} + \text{tag} z \hat{O} R}{1 - \frac{pb'}{b} \cdot \text{tag} z \hat{O} R} = n$ , da cui si trova che  $\text{tag} z \hat{O} R = zr = \frac{n - \frac{pb'}{b}}{1 + n \frac{pb'}{b}}$ .

Analogamente per quanto riguarda  $zr'$ .

$$TZ=TD-DZ=y-\frac{n-\frac{pb'}{b}}{1+n\frac{pb'}{b}} \qquad TZ'=TD-DZ'=y-\frac{n+\frac{b'}{pb}}{1-n\frac{b'}{pb}}$$

Inoltre è evidente che

$$\begin{aligned} TU=TD+DU &= \frac{c'q}{c} + y & TU'=DU'-TD &= \frac{c'}{cq} - y \\ VK=EV+EK &= \frac{pb'}{b} + \frac{1}{n} & V'K=EV'-EK &= \frac{b'}{pb} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ciò consente a Trudi di trasformare l'equazione (12) nella seguente formulazione geometrica:

$$(TU: TU')(TZ: TZ') = (As: AS)(ev: du')(VK: V'K)$$

Trovati dunque i quattro punti U, U', Z, Z' sulla tangente in D, tutta la costruzione consiste nel determinare, sulla stessa tangente, un punto T tale che - per dirla con Trudi -

“stia TU·TZ:TU'·TZ' in ragion composta di As ad AS, di ev a du' e di VK a V'K, dal quale condotta la tangente TP al cerchio, sarà P un vertice del triangolo”<sup>82</sup>.

A questo punto Trudi fornisce quella che chiama Soluzione geometrica derivata da' medesimi principj, su' quali è basata la soluzione analitica del Lagrange. Questa si articola in due Lemmi e in una Analisi per la soluzione geometrica.

Lemma 1: *Due angoli dÔM, dÔS al centro di un cerchio, sieno bisecati dalle Ot, Ou, che incontrino in t, u la tangente in d. Indi si tirino le uS, tMh e si elevi su Ou la perpendicolare Ou'. Si avrà sempre tu':tu=du':hS*<sup>83</sup>.

Con riferimento alla fig. 4, il prolungamento di Ot incontra nel punto k la parallela uk alla tangente zy ed è evidente, per la similitudine dei triangoli Ouk e Oyz, che:

$$uk:yz=Ou:Oy$$

Ma Oy=Od e pertanto si può scrivere:

$$uk:yz=Ou:Od \qquad (13)$$

<sup>82</sup> “Questo problema di facile soluzione, cui vedesi chiaramente ridotta la dimandata costruzione, - aggiunge in nota l'autore - trovasi risolto dal Simson tra quelli del Lib. II *de sectione determinata*: sicché la nostra costruzione vedesi nelle forme più convenienti alla sintesi eseguita (cfr. *Al I quesito del programma Risposta di Nicola Trudi*, p. 8).

<sup>83</sup> Trudi, in realtà, scrive tu':tu::du':hS.



Lemma 2: Da un qualunque punto  $C$  preso sul diametro  $dD$  si tiri al cerchio una secante  $CMP$ . Se ai punti  $M, P$  si applichino le tangenti, che s'incontrino in  $t, T$  con quelle de' punti  $d, D$ , i tre punti  $C, t, T$  staran per dritto.

Trudi non dimostra questo asserto, avvertendo che esso non è altro che un caso particolare di un altro lemma che avrebbe dimostrato in seguito nella risoluzione del secondo quesito del *Programma*.<sup>86</sup>

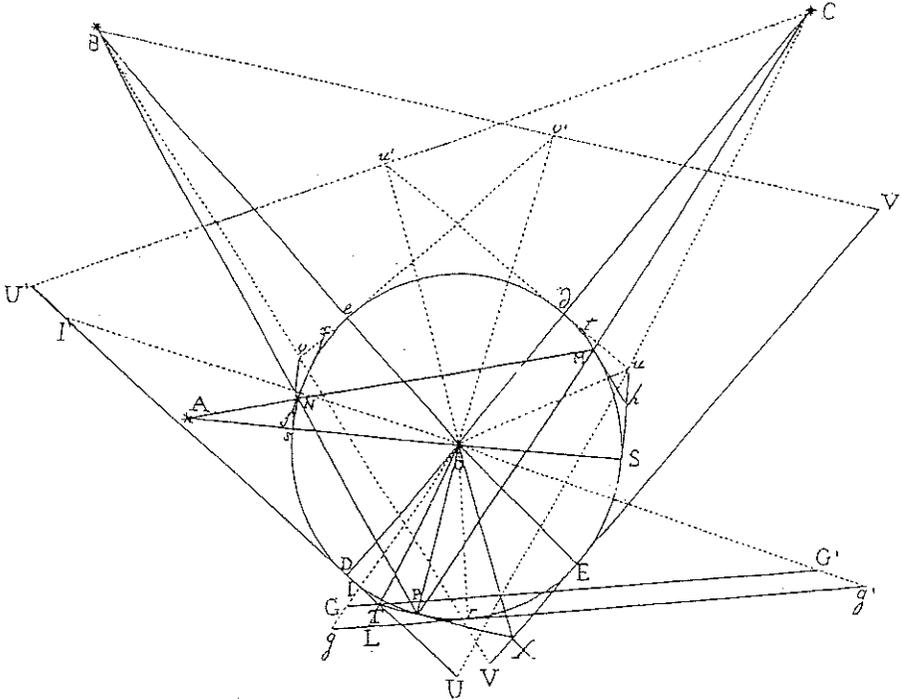


fig. 5

Premessi i due suddetti lemmi, egli è finalmente in grado di produrre l'*Analisi per la soluzione geometrica*. Con riferimento alla fig. 5, dati i tre punti  $A, B, C$ , ed il triangolo richiesto  $MNP$ , si prolunghino le congiungenti  $AO, BO$  e  $CO$  fino a incontrare la circonferenza in  $S, E, D$  rispettivamente. Si considerino le tangenti in  $d$  ed in  $S$ , il loro punto di incontro  $u$ , e la tangente in

<sup>86</sup> Si limita a fare osservare che questo, al pari del precedente, traduce in termini geometrici il già citato teorema di Neper; *ibid.*, p. 11.

M tMh. Tracciata la perpendicolare Ou' alla Ou, per il Lemma 1 sarà tu':tu=du':hS. D'altra parte, se si considerano i prolungamenti di Cu e di Cu' e le loro rispettive intersezioni U ed U' con la tangente in D, la quale incontra in T la tangente in P, dovendo per il Lemma 2 i tre punti C, t, T essere allineati, si ha anche tu':tu=TU':TU. Dal confronto con la precedente proporzione si avrà allora

$$TU':TU=du':hS \quad (18)$$

Analogamente, se v è il punto di intersezione delle tangenti nei punti e, s, considerata la tangente xNf in N, e tracciata la perpendicolare Ov' ad Ov, si prolunghino Bv e Bv' fino a V e V', punti appartenenti alla tangente in E la quale incontra in X quella nel punto P; si avrà allora

$$XV':XV=ev':fs \quad (19)$$

E da (18) e (19) chiaramente si ottiene:

$$(XV':XV)(TU:TU')=(hS:fs)(ev':du') \quad (20)$$

Detta Or la bisettrice dell'angolo DÔE, essendo  $TÔX=\frac{1}{2}DÔE$ <sup>87</sup> e  $XÔE=TÔr$ <sup>88</sup>, i due triangoli rettangoli LOr e XOE risulteranno uguali, e quindi rL=EX. Staccati sulla tangente in r i segmenti rg ed rg' rispettivamente uguali ad EV ed EV', risulterà gL=XV e g'L=XV'<sup>89</sup>. Se allora da T si traccia la parallela a gg' che incontri in G e G' le Og e Og', per il Lemma 1 si avrà: XV':XV=TG':TG; e poiché per il Lemma 2 i punti A, f, h devono essere allineati, si avrà anche hS:fs=AS:As per cui la (21) diventa:

$$(TG':TG)(TU:TU')=(AS:As)(ev':du') \quad (21)$$

Ed essendo date le quattro rette AS, As, ev', du' allora sarà dato anche il primo membro della (22). Se allora I e I' sono rispettivamente i punti di intersezione di OG con DU e di Og' con la stessa DU, i triangoli TI'G', TIG saranno *dati in specie*<sup>90</sup>, e quindi risultano noti i rapporti TG':TI' e TG:TI. Sarà dunque noto anche il prodotto (TI':TI)(TU:TU') che altro non esprime se non il rapporto tra i rettangoli TU in TI' e TU' in TI. Sarà così dato il punto T e ne resta di conseguenza determinata la posizione della tangente TP che fornisce il punto P che doveva determinarsi.

<sup>87</sup>  $TÔX=TÔP+PÔX$ , ma  $DÔT=TÔP$  e  $PÔX=XÔE-TÔr$ , quindi  $TÔX=DÔT+TÔr=DÔr=\frac{1}{2}DÔE$ .

<sup>88</sup>  $XÔE=rÔE-rÔX$  e  $TÔr=TÔX-rÔX$ .

<sup>89</sup>  $gL=rg-Lr=EV-EX=XV$ ;  $g'L=rg+Lr=EV'+XE=XV'$ .

## 5. IL SECONDO TEMA DEL PROGRAMMA

*Inscrivere in un triangolo dato in specie ed in grandezza tre cerchi i quali si tocchino tra loro e tocchino i lati del triangolo.*

Il primo a prendere in considerazione questo problema era stato, agli inizi dell'Ottocento, Gianfrancesco Malfatti<sup>91</sup> che ne aveva trattato, per via analitica, solo uno dei casi possibili, quello in cui i tre cerchi sono tutti interni al triangolo. Malfatti trovò espressioni dei tre raggi dei cerchi del tutto identiche a quelle che, come vedremo, saranno ricavate da Padula. La sua soluzione, pubblicata tra le Memorie dell'Accademia dei XL, presentava, però, un lato oscuro. Essendo, infatti, risultata troppo lunga e intricata di calcoli e passaggi, egli ne aveva sostituito la parte analitica con un teorema del quale aveva esibito il solo enunciato e non la dimostrazione.<sup>92</sup> Sette anni dopo, nel 1810, Gergonne, che ignorava l'esistenza della soluzione del Malfatti, affrontò lo stesso problema, determinando però uno solo dei tre raggi richiesti, per il quale forniva un'espressione molto più prolissa e complicata di quella esibita da Malfatti<sup>93</sup>.

Lo stesso Gergonne, una volta messo al corrente della più semplice soluzione di Malfatti<sup>94</sup> riuscì a verificare l'esattezza delle espressioni dei raggi

<sup>90</sup> Una grandezza è "data di specie" se risulta simile ad un'altra grandezza assegnata.

<sup>91</sup> Sulla figura e l'opera di questo matematico si rimanda a *Gianfrancesco Malfatti nella cultura del suo tempo. Atti del Convegno. Ferrara, 23-24 ottobre 1981*, Ferrara, Università degli Studi, 1982.

<sup>92</sup> Cfr. "Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana detta dei XL", v. X (1803), p. 235. Malfatti comincia col considerare il cerchio inscritto al triangolo avente centro O nel punto di incontro delle tre bisettrici degli angoli interni del triangolo. Considera, poi, i tre triangoli rettangoli AOC', BOA' e COB' ottenuti tracciando le perpendicolari da O ai tre lati, OA', OB' e OC', posto  $s = \text{tag}A\hat{O}C'$ ,  $t = \text{tag}B\hat{O}A'$  e  $u = \text{tag}C\hat{O}B'$ , trova per i tre raggi x, y e z delle tre circonferenze richieste le seguenti relazioni:  $2\sqrt{xy} = s+t-m-n$ ;  $2\sqrt{xz} = s+u-m-p$ ;  $2\sqrt{yz} = t+u-n-p$  (dove  $m=AP$ ,  $n=BQ$  e  $p=CR$  con P, Q, R sono rispettivamente i punti di tangenza dei lati AB, BC e CA con le tre circonferenze). A questo punto, invece di mostrare l'analisi che lo conduce alla determinazione dei raggi delle circonferenze richieste (che egli stesso confessa essere piuttosto intricata di calcoli e di passaggi), egli enuncia, ma non dimostra, il seguente teorema: "Dico che con supporre

$$2m = s+t+u-r + \sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+t^2} - \sqrt{r^2+u^2}$$

$$2n = s+t+u-r + \sqrt{r^2+t^2} - \sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+u^2}$$

$$2p = s+t+u-r + \sqrt{r^2+u^2} - \sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+t^2}$$

si verrà a soddisfare alle precedenti equazioni".

<sup>93</sup> Cfr. "Annales des Mathématiques pures et appliquées" t. I (1810), p. 42. L'espressione del raggio trovata da Gergonne è  $r = \frac{R}{p} \frac{(c'c'' - (d-d')(d-d''))^2}{c'(c'' - (d-d')) + 2d(c'' - (d-d'')) + c''(c' - (d-d''))}$ , avendo egli

indicato con c, c' e c'' i lati opposti rispettivamente ai vertici A, B, C del triangolo; R il raggio del cerchio inscritto al triangolo; d, d' e d'' le distanze del centro di detto cerchio rispettivamente dai tre vertici A, B, C e p la distanza di A dal punto di contatto di detto cerchio con il lato AB.

<sup>94</sup> Era stata una lettera di Bidone a rivelare ai redattori degli *Annales* l'esistenza della soluzione di Malfatti.

da questo esibite, ma non a dimostrarne l'equivalenza con quella da lui trovata<sup>95</sup>. Comunque, perché la soluzione del matematico italiano fosse completamente legittimata restava da dimostrare la veridicità del teorema al quale egli aveva ricondotto la risoluzione del problema. La questione fu sollevata ed affrontata, ma solo parzialmente, da Thedenat, rettore dell'Accademia di Nimes. Thedenat, infatti, non diede una dimostrazione diretta di quel teorema, ma si limitò a trasformare le espressioni dei raggi ivi presenti in altre formalmente più semplici<sup>96</sup>. Chi per primo, invece, diede una dimostrazione diretta di quell'asserto fu Lehmütz<sup>97</sup> il quale per l'occasione si servì del metodo analitico-algebrico. Sette anni dopo Jacob Steiner affrontò e risolse, con la pura geometria, un altro problema, *Dati tre cerchi descriverne altri tre in modo tale che ciascuno tocchi gli altri due e due dei dati* dal quale Gergonne dimostrò che si poteva ricavare, come caso particolare, quello più volte dibattuto dei tre cerchi<sup>98</sup>. Infine nel 1831 Paucker, geometra dell'Accademia di Pietroburgo, fornì del problema una elegante soluzione e costruzione secondo l'analisi geometrica, con una *resolutio* che si svolge con una sequela di nove lemmi, nei quali l'autore espone proprietà rilevanti delle tazioni circolari, e una *compositio* geometrica fondata su altri undici lemmi<sup>99</sup>. Fu la lettura di questa soluzione che ispirò a Flauti la sfida matematica. Essendo, infatti, detta soluzione capitata tra le mani di Trudi, nel 1838, questi l'aveva ridotta ad altra più semplice e rapida che aveva destato l'ammirazione dello stesso Flauti. Fu allora che questi ebbe allora per certo che nessun analista sarebbe riuscito mai a far di meglio.

Relativamente alle soluzioni dei due contendenti ci limiteranno a mostrarne le sole linee generali. Il problema, infatti, ammette numerose soluzioni, relative a vari differenti casi possibili, la descrizione delle quali richiederebbe molto spazio. D'altra parte quelle di Padula discendono tutte da un'unica impostazione generale data al problema, per cui, ai fini dell'esposizione del metodo seguito dal giovane analista napoletano, la disamina dei vari casi non aggiunge molto a quanto si può rilevare dalla considerazione del primo caso. Molto più prolissa e laboriosa risulta, invece, la soluzione fornita da Turdi che, seguendo il classico metodo dell'analisi geometrica, procede nella risoluzione e costruzione del problema solo dopo aver dimostrato, con metodo sintetico, una lunga serie di lemmi e di proposizioni.

---

<sup>95</sup> Cfr. "Annales des Mathematiques pures et appliquées" t. II (1811), p. 60.

<sup>96</sup> *Ibid.*, p. 348.

<sup>97</sup> *Ibid.*, t. X (1820).

<sup>98</sup> *Ibid.*, t. XVII già pubblicato nel *Journal de Crelle*.

<sup>99</sup> Cfr. Paucker, *Mémoire sur une question de Géométrie relative aux Tactions des cercles*, "Atti Acc. di Pietroburgo" 1831.

6 - LA RISPOSTA DI PADULA

Dato il triangolo AA'A'', siano M, M', M'' i centri dei cerchi cercati. Poiché questi cerchi devono essere tangenti rispettivamente alle coppie di lati AA' AA'', AA' A'A'', A'A'' AA'', si avrà che le rette AM, A'M' e A''M'' saranno bisettrici degli angoli,  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}'$ ,  $\hat{A}''$  e s'incontreranno nel punto O, centro del cerchio iscritto al triangolo dato (fig. 6).

Assunto allora un sistema di riferimento ortogonale del piano avente origine nel punto A, asse delle ascisse la retta per AA' e asse delle ordinate la perpendicolare a questo in A, posto  $O(\alpha, \beta)$ ,  $A'(\alpha+\alpha', 0)$ ,  $M(t, u)$ ,  $M'(t', u')$ , con u e u' raggi dei cerchi di centro M e M' rispettivamente, poiché la distanza M'M dei centri tangenti esternamente deve essere uguale o alla somma dei raggi, e quella dei cerchi tangenti internamente deve essere uguale alla loro differenza, si ha che

$$M'M = (u' \pm u)$$

ossia

$$(t'-t)^2 + (u'-u)^2 = (u' \pm u)^2 \quad (1)$$

da cui si ricavano le relazioni:

$$t'-t = \pm 2\sqrt{uu'} \quad t'-t=0 \quad (2)$$

valendo la prima o la seconda delle (2) a seconda che nel secondo membro della (1) compare il segno + o quello -.

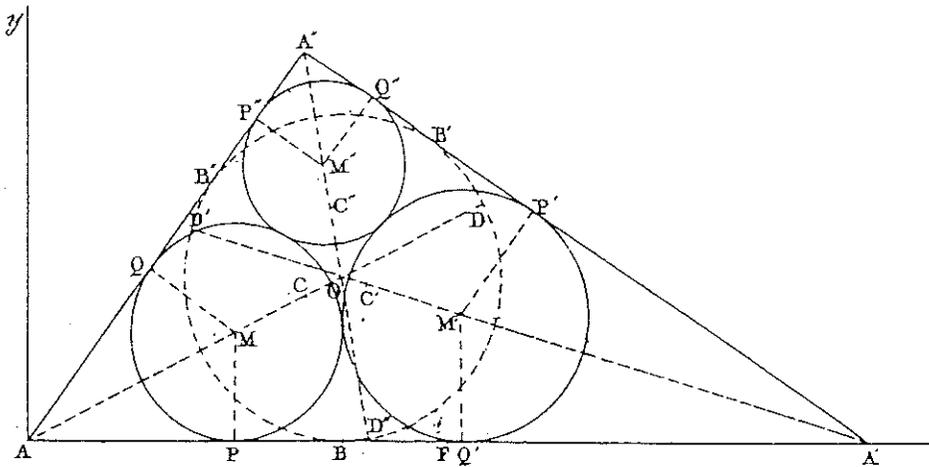


fig. 6

D'altra parte  $M$  e  $M'$  appartengono rispettivamente alle rette  $OA$  e  $OA'$ , pertanto si ha:

$$u = \frac{\beta}{\alpha} t \qquad u' = \frac{\beta}{\alpha'} (t' - \alpha - \alpha')$$

con che le (2) si trasformano nelle seguenti:

$$\alpha u + \alpha' u' \pm 2\beta \sqrt{uu'} = \beta(\alpha + \alpha') \qquad \alpha u + \alpha' u' = \beta(\alpha + \alpha') \quad (3)$$

Analogamente, se si indica con  $u''$  il raggio del cerchio di centro  $M''$ , e con  $\alpha + \alpha''$  l'ascissa di  $A''$ , sarà  $A'A'' = \alpha' + \alpha''$  e si avranno le altre due coppie di equazioni:

$$\alpha u + \alpha'' u'' \pm 2\beta \sqrt{uu''} = \beta(\alpha + \alpha'') \qquad \alpha u + \alpha'' u'' = \beta(\alpha + \alpha'') \quad (4)$$

$$\alpha' u' + \alpha'' u'' \pm 2\beta \sqrt{u'u''} = \beta(\alpha' + \alpha'') \qquad \alpha' u' + \alpha'' u'' = \beta(\alpha' + \alpha'') \quad (5)$$

Ciò posto, Padula dice che tutto il problema consiste nel ricavare i valori di  $u$ ,  $u'$  e  $u''$  da queste equazioni combinate a tre a tre in tutti i modi possibili, purché non si prendano contemporaneamente entrambe le (3), le (4) o le (5). Fa vedere che se si pone

$$x'' = 2\sqrt{uu'} \qquad x' = 2\sqrt{uu''} \qquad x = 2\sqrt{u'u''}$$

(con  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$  determinazioni positive di quei radicali), risultando

$$u = \frac{x'x''}{2x} \qquad u' = \frac{xx''}{2x'} \qquad u'' = \frac{xx'}{2x''}$$

le equazioni (3), (4), e (5) possono assumere la forma:

$$\alpha \frac{x'x''}{2x} + \alpha' \frac{xx''}{2x'} + \beta x'' = \beta(\alpha + \alpha')$$

$$\alpha \frac{x'x''}{2x} + \alpha'' \frac{xx'}{2x''} + \beta x' = \beta(\alpha + \alpha'')$$

$$\alpha' \frac{xx''}{2x'} + \alpha'' \frac{xx'}{2x''} + \beta x = \beta(\alpha' + \alpha'')$$

da cui si vede chiaramente che si tratta di equazioni di 3° grado, cosa che rende assai ardua la soluzione del problema. Padula mostra, però, che se si sommano le prime due di quelle equazioni e se ne sottrae la terza si ottiene facilmente l'equazione

$$\alpha \frac{x'x''}{x} + \beta(x' + x'' - x) = 2\beta\alpha \quad (6)$$

e analogamente si potranno avere le altre due equazioni

$$\alpha' \frac{xx''}{x'} + \beta(x+x''-x') = 2\beta\alpha' \quad (7)$$

$$\alpha'' \frac{xx'}{x''} + \beta(x+x'-x'') = 2\beta\alpha'' \quad (8)$$

contenenti ciascuna una sola delle tre quantità  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ , le quali non sono tra loro indipendenti, ma legate a  $\beta$  dalla relazione:

$$\beta^2 = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha + \alpha' + \alpha''} \quad (9)$$

Considerando, dunque, la (9) insieme con due delle precedenti equazioni (6), (7), (8) si possono ottenere altre equazioni in  $x$ ,  $x'$  e  $x''$  contenenti ciascuna una sola delle tre grandezze  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ . Infatti, (7) si ricava  $\alpha' = \frac{\beta(x+x''-x')}{2\beta - \frac{xx''}{x'}}$ , e

dalla (9)  $\alpha'' = \frac{\beta^2(\alpha + \alpha')}{\alpha\alpha' - \beta^2}$ , valori che, sostituiti nella (8), forniscono l'equazione

$$\begin{aligned} [2\beta\alpha + \beta(x+x''-x')] \frac{xx''}{x''} + [2\beta\alpha + \beta(x+x'-x'')] \frac{xx''}{x'} - \alpha(x'-x'')^2 - 4\beta^2x = \\ = 4\alpha\beta^2 \quad (10) \end{aligned}$$

Inoltre, se si somma  $\beta(x+x''-x')$  ad ambo i membri della (6) si ottiene:

$$\alpha \frac{x'x''}{x} + 2\beta x'' = 2\beta\alpha + \beta(x+x''-x')$$

che, sostituita nella (10), fornisce l'equazione

$$\beta xx' + \beta xx'' + \alpha x'x'' - 2\beta^2x = 2\beta^2\alpha \quad (11)$$

E poiché per la (6)  $\alpha \frac{x'x''}{x} + \beta(x'+x'') = 2\beta\alpha + 2\beta x$ , la (11) diventa

$$x^2 - 2(\beta - \alpha)x = 2\beta\alpha \quad (12)$$

Similmente, data la simmetria delle equazioni (6), (7) e (8) si otterranno anche:

$$x'^2 - 2(\beta - \alpha')x' = 2\beta\alpha' \quad (13)$$

$$x''^2 - 2(\beta - \alpha'')x'' = 2\beta\alpha'' \quad (14)$$

Dalle (12), (13) e (14) si ricavano facilmente i seguenti valori di  $x$ ,  $x'$  e  $x''$ :

$$x = \beta - \alpha + \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 2\beta\alpha} = \beta - \alpha + a$$

$$x' = \beta - \alpha' + \sqrt{(\beta - \alpha')^2 + 2\beta\alpha'} = \beta - \alpha' + a'$$

$$x'' = \beta - \alpha'' + \sqrt{(\beta - \alpha'')^2 + 2\beta\alpha''} = \beta - \alpha'' + a''$$

con  $a = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ ,  $a' = \sqrt{\beta^2 - \alpha'^2}$ ,  $a'' = \sqrt{\beta^2 - \alpha''^2}$ .

A questo punto si possono ottenere i valori cercati dei raggi  $u = \frac{x'x''}{2x}$ , Infatti essendo per la (6)

$$u = \frac{x'x''}{x} = \frac{2\beta\alpha - \beta(x' + x'' - x)}{\alpha}$$

si ha

$$u = \frac{\beta}{2\alpha} (\alpha + \alpha' + \alpha'' - \beta + a - a' - a'')$$

E analogamente, quando si tengano presenti la (7) e la (8),

$$u' = \frac{\beta}{2\alpha'} (\alpha + \alpha' + \alpha'' - \beta + a' - a - a'')$$

$$u'' = \frac{\beta}{2\alpha''} (\alpha + \alpha' + \alpha'' - \beta + a'' - a - a')$$

Padula mostra che i tali valori di  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$  sono tutti minori di  $\beta^{100}$ ; di conseguenza essi esprimono i tre raggi dei cerchi inscritti nel triangolo che si volevano trovare. E poiché  $x'' = t' - t = PQ'$ ,  $x' = QP''$  e  $x = P'Q''$ , presi  $AC$ ,  $A'C'$  e  $A''C''$  uguali rispettivamente ad  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $A''B''$ , si avrà che  $PQ' = C''D''$ ,  $QP'' = C'D'$  e  $P'Q'' = CD$ , con che la *risoluzione* del problema è completata.

La *composizione* di questo problema è abbastanza semplice. Inscritto, infatti, nel triangolo  $AA'A''$  il cerchio  $BB'B''$ , Padula stacca su  $A'O$  e  $A''O$  due segmenti,  $A'C'$  e  $A''C''$  uguali rispettivamente ad  $A'B'$  e  $A''B''$ ; considera poi sulla retta  $AA'$ , dalla parte di  $A'$ , il punto  $E$  tale che  $A'E = OA$ , e il punto  $F$  tale che  $EF = A'O + C''D$ . Conduce quindi la perpendicolare  $PM$  nel punto medio di  $AF$  e considera i segmenti  $PQ' = C''D''$  e  $AP'' = AP + C'D'$  e le perpendicolari  $Q'M'$  e  $M''P''$  rispettivamente ai lati  $AA'$  e  $AA''$ . I punti  $M$ ,  $M'$  e  $M''$  saranno i centri dei cerchi richiesti i cui raggi saranno rispettivamente  $MP$ ,  $M'P'$  e  $M''P''$ .

---


$$^{100} u = \frac{2\beta\alpha - \beta(x' + x'' - x)}{2\alpha} = \frac{\beta(2\alpha - x' - x'' + x)}{2\alpha} = \frac{\beta[2\alpha + x - (x' + x'')]}{2\alpha}$$

ed essendo le distanze dei centri  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  dei tre cerchi, ossia i lati del triangolo  $MM'M''$ , sarà  $x' + x'' > x$  e quindi  $u = \frac{\beta[2\alpha + x - (x' + x'')]}{2\alpha} < \frac{\beta}{2\alpha} (2\alpha + x - x) < \beta$ .

Dopo aver mostrato il caso in cui i tre cerchi sono tutti interni al triangolo, Padula passa a trattare gli altri possibili casi, facendo vedere come questi scaturiscano volta per volta da una diversa scelta delle tre equazioni dalle (3), (4) e (5). Se nella prima delle (3), infatti, si prende il segno - il sistema costituito da questa equazione e dalla prime delle (4) e (5) conduce a tre possibili casi:

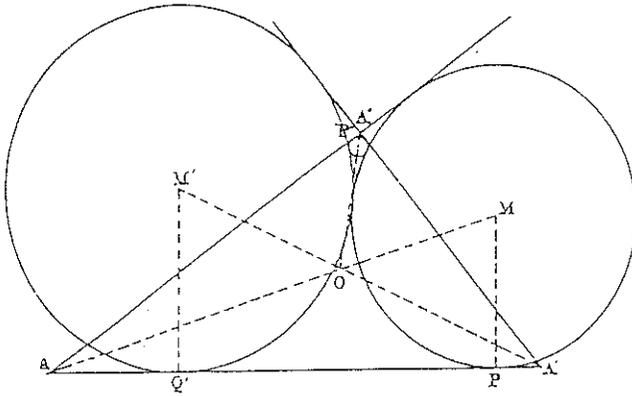


fig. 7

1) i cerchi non sono tutti e tre inscritti nel triangolo (fig. 7), ma quelli contenuti sotto gli angoli  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  tagliano i rispettivi lati opposti del triangolo, mentre quello situato nell'angolo  $\hat{A}''$  sta tutto all'interno del triangolo nella regione compresa tra il vertice del triangolo e il punto di contatto degli altri due cerchi.

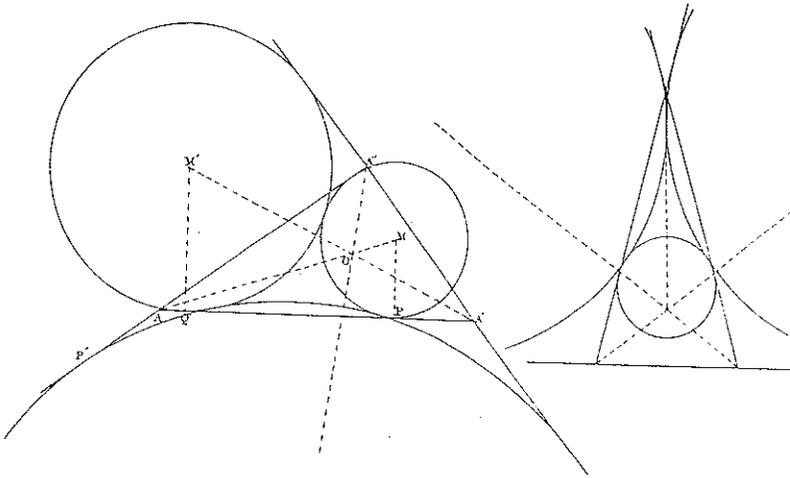


fig. 8

fig. 9

2) un cerchio è compreso nell'angolo  $\hat{A}$  o nell'angolo  $\hat{A}'$ , ma non sta tutto all'interno del triangolo, gli altri due tagliano i lati opposti del triangolo (fig. 8);

3) un cerchio è contenuto completamente nel triangolo, ma non è contenuto nella regione tra il vertice e il punto di contatto degli altri due cerchi, avvenendo detto contatto tra il vertice stesso e il primo cerchio (fig. 9).

Se poi si assume il radicale col segno + nella prima delle (3) e col segno - nelle prime delle (4) e (5), si hanno i casi rappresentati dalle figure 10 e 11.

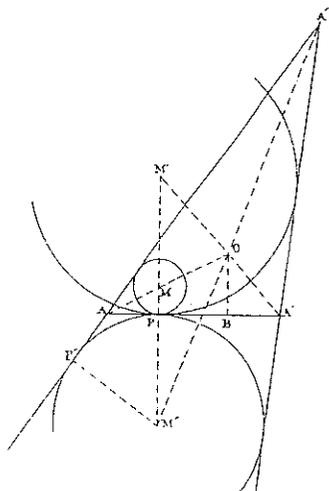


fig. 10

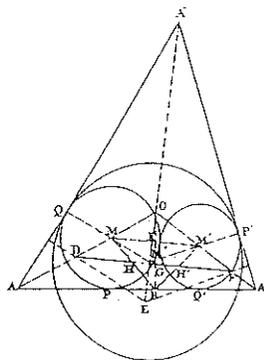


fig. 11

Ma se invece delle prime delle (3), (4) e (5) si considerano le seconde si verificheranno i casi delle figure 12 e 13<sup>101</sup>.

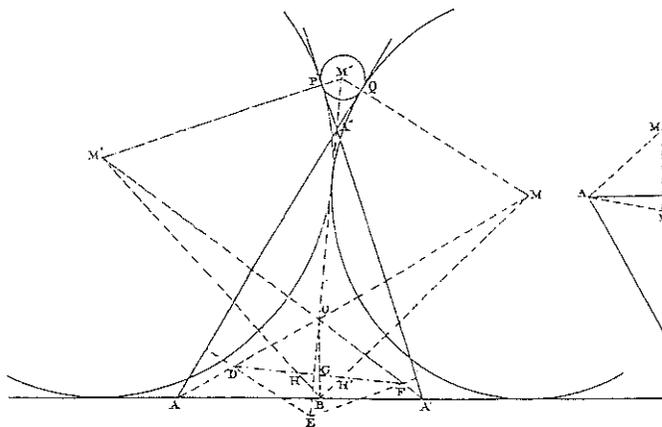


fig. 12

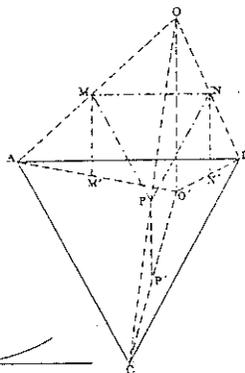


fig. 13

<sup>101</sup> Va rilevato che di tutti i casi mostrati Padula non si limita a esibire l'analisi del problema, ma ne fornisce, come richiesto, anche la sintesi.

## 8. LA RISPOSTA DI TRUDI

Secondo i canoni dell'analisi geometrica, Trudi suppone già risolto il problema e assume come dato il triangolo  $aa'a''$  con i tre cerchi in esso circoscritti come in fig. 14.

Poiché il problema richiede che il triangolo sia dato in specie, osserva che:

"Se vi fosse un altro triangolo simile al proposto, che tenesse in se iscritti tre cerchi come quelli, che si cerca di inscrivere nel primo, il problema sarebbe immantinenti risolto"<sup>102</sup>

Considerato un angolo  $A'\hat{A}A''$ , uguale ad uno degli angoli di detto triangolo, con inscritto un cerchio qualsiasi BQH, Trudi trasforma il problema nell'altro di inscrivere in quest'angolo altri due cerchi, LCD, C'KE, che si tocchino fra loro e che tocchino il cerchio BQH e i lati dell'angolo, e tali che le loro comune tangente DE sia parallela a qualunque retta che con l'angolo  $A'\hat{A}A''$  determina un triangolo simile a quello dato (fig. 15).

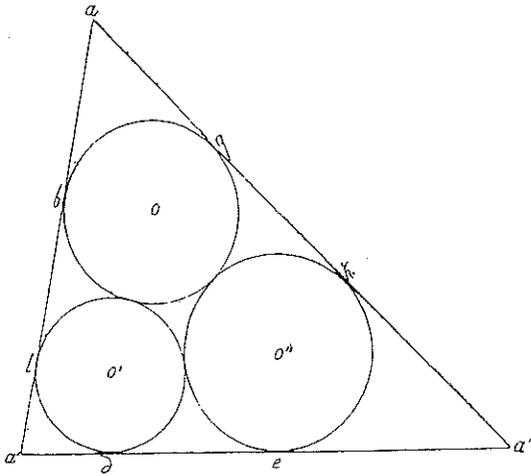


fig. 14

A differenza di Padula, Trudi non affronta il problema con metodo analitico algebrico, ma con il classico metodo della risoluzione e composizione della tradizione dell'analisi geometrica.

Per fare ciò, seguendo la via intrapresa da Paücker, premette alla dimostrazione quattro lemmi e altrettanti corollari<sup>103</sup> tutti dimostrati per via puramente geometrica, secondo la tradizione della scuola sintetica.

<sup>102</sup> Cfr. *Al II quesito del Programma Risposta di Nicola Trudi*, p. 19.

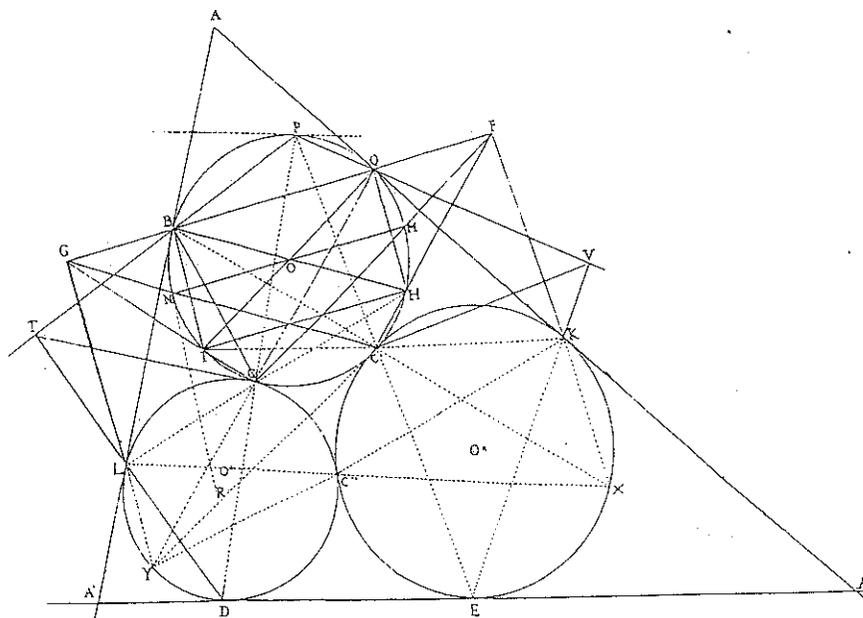


fig. 15

Il Lemma 1 (fig. 1) stabilisce che, se BL è tangente comune a due cerchi che si toccano in un punto C e QY una secante i suddetti cerchi per C, l'angolo  $\widehat{QGY}$  formato dalle corde BQ e LY è retto, e GC è perpendicolare a QY.

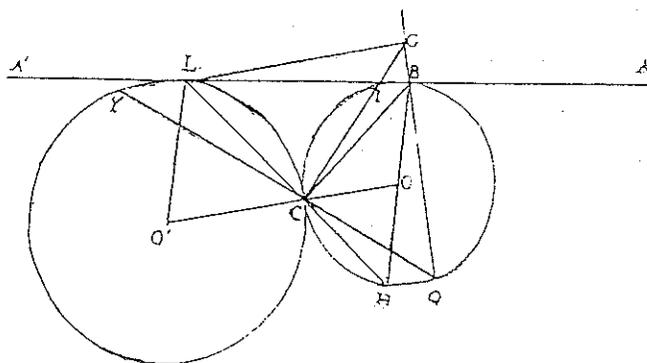


fig. 16

<sup>103</sup> Tre riguardano il secondo lemma e uno il terzo.

Il Lemma 2 (fig. 17) dice che se due cerchi di centro  $O$  e  $O'$  sono tangenti a un terzo cerchio rispettivamente in  $C$  e  $C'$  e ad una retta rispettivamente in  $B$ ,  $L$ , le corde  $BC'$  e  $LC''$  si intersecano in un punto  $X$  della circonferenza di centro  $O''$ . Da questo lemma discende che:

1) se  $X'$  è il secondo estremo del diametro della circonferenza di centro  $O''$  passante per  $X$ , le tangenti in  $X$  e in  $X'$  risultano parallele alla  $BL$  (Corollario 1°, fig. 17);

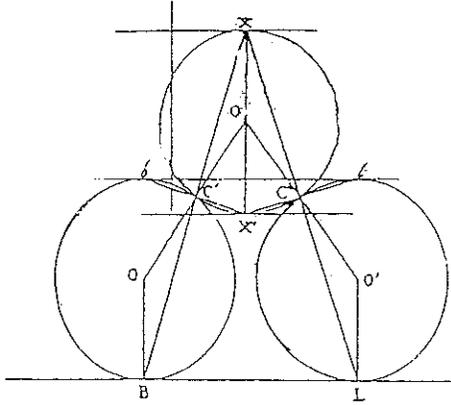


fig. 17

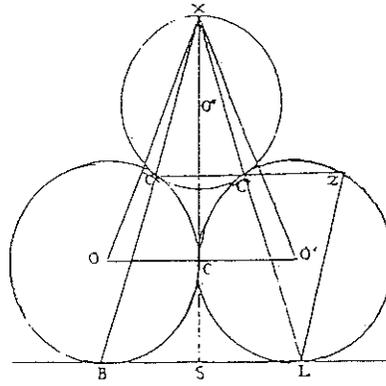


fig. 18

2) se i cerchi di centro  $O$  e  $O'$  sono tangenti in un punto  $C$ , la congiungente  $XC$  sarà tangente comune ai suddetti cerchi (Corollario 2°, fig. 18) ed essa è il luogo dei punti dai quali risultano uguali le tangenti condotte ai cerchi di centro  $O$  e  $O'$  (Corollario 3°). Il Lemma 3 stabilisce che il punto  $G$  in cui si incontrano due corde di un cerchio,  $BQ$  e  $NC$ , e i punti di incontro  $U$  e  $S$  delle tangenti in  $Q$  e  $C$ , stanno sulla stessa retta (fig. 19).

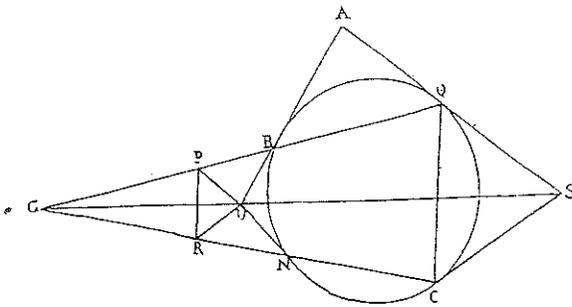


fig. 19

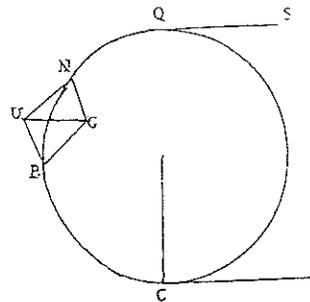


fig. 20

Da questo segue che se la congiungente i punti Q e C è un diametro del cerchio, le tangenti QS e CS saranno parallele ed anche la UG risulterà ad esse parallela (Corollario, fig. 20).

Nel successivo Lemma 4 Trudi dimostra che se BQHI è un rettangolo inscritto in una circonferenza e NM è un diametro parallelo a uno dei suoi lati, ad esempio BQ, a partire da un qualsiasi punto G della retta per BQ tracciate le secanti, GNC', CIC, alla circonferenza passando per i punti N ed I, le corde C'H e CM si incontreranno in un punto F della stessa retta BQ (fig. 21).

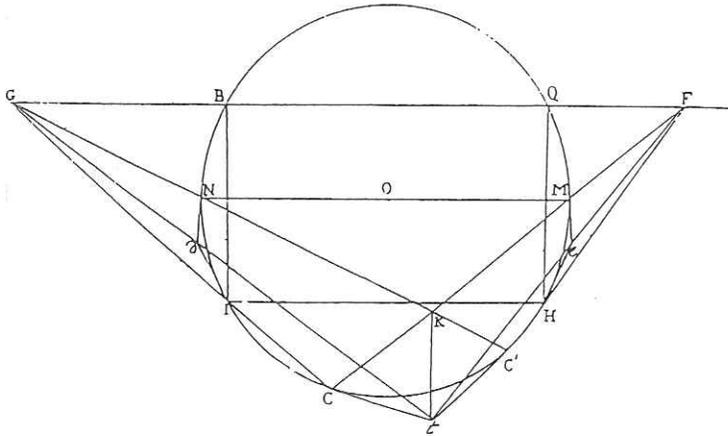


fig. 21

Il punto F, la cui posizione evidentemente dipende da quella di G, viene da Trudi chiamato *punto di concorso corrispondente al punto G*.

Questi lemmi, con i relativi corollari, vengono dimostrati da Trudi per via puramente geometrica, secondo la tradizione della scuola sintetica.

A questo punto Trudi è in grado di affrontare il Problema: *Dato il cerchio BQH iscritto in un dato angolo A, descrivere due altri cerchi, che si tocchino tra loro, tocchino il cerchio dato, e i lati dell'angolo, e tali che la loro tangente comune formi coll'angolo A un triangolo equiangolo al dato triangolo a'aa''*. Prima di risolverlo, Trudi fa notare che detto problema ammette più di una soluzione e che egli si riferirà, in particolare, al caso in cui i due cerchi si tocchino al di sotto di BQH e si considera la loro tangente comune inferiore.

“Ma - aggiunge - potrebbe ancora supporre, che i due cerchi fossero superiori al cerchio BQH (fig. 22); potrebbero ancora considerarsi nell'un caso, e nell'altro le tangenti superiori (figg. 23 e 24); considerarsi del pari le tangenti trasversali (fig. 25); e così far altre supposizioni”<sup>104</sup>

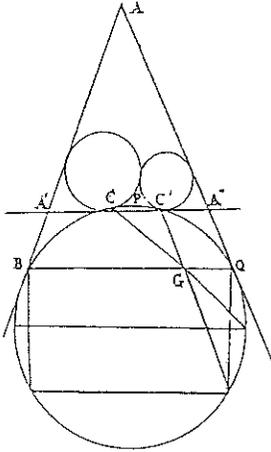


fig. 22

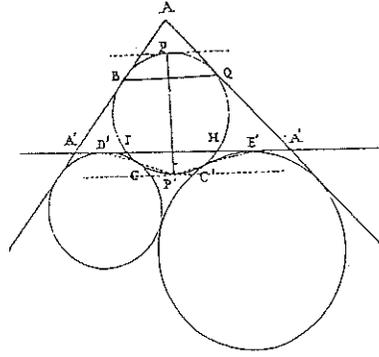


fig. 23

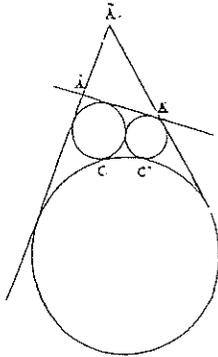


fig. 24

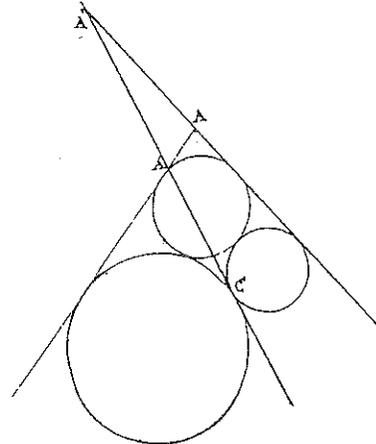


fig. 25

Passa quindi all'analisi del problema supponendo di avere i due cerchi di centro  $O'$  e  $O''$  che si tocchino tra di loro nel punto  $C''$ , che tocchino il cerchio dato di centro  $O$  nei punti  $C$  e  $C'$ , che siano tangenti ai lati dell'angolo nei punti  $L$  e  $K$ , e che infine abbiano come tangente comune la retta per  $DE$  che forma con l'angolo  $\hat{A}$  il triangolo  $A'AA''$  equiangolo al triangolo  $a'aa''$  (fig. 15). Per il Lemma 2, le congiungenti  $D$  con  $C$  ed  $E$  con  $C'$  s'incontreranno in un punto  $P$  sulla circonferenza di centro  $O$  e, poiché la tangente in  $P$ , (per il Corollario 1° del suddetto lemma) deve

<sup>104</sup> Al II quesito del Programma Risposta di Nicola Trudi, in *Produzioni*, cit., p. 23.

risultare parallela a DE, il punto P sarà dato. D'altra parte, per il Lemma 1, le corde PB e DL si devono incontrare ad angolo retto in un punto T, e la tangente in C ai due cerchi di centro O e O' deve essere perpendicolare a DP; ne segue che TC è altezza del triangolo rettangolo DTP e quindi  $DP:PT=PT:PC$ , ovvero  $DP \cdot PC=TP^2$ . Parimenti si avrà che  $EP \cdot PC'=PV^2$  e, poiché (per il Corollario 2° al Lemma 2)  $DP \cdot PC=EP \cdot PC'$ , si avrà che  $TP^2=PV^2$ , e quindi  $PT=PV$ . Inoltre, la congiungente L con C incontra ulteriormente il cerchio di centro O nel punto H. Poiché l'angolo  $B\hat{C}L$ , è retto tale sarà anche il suo supplementare  $B\hat{C}H$  e il punto H allora è dato essendo dato il punto B. Parimenti essendo dato il punto Q è dato anche il punto I, intersezione della retta per KC' con la stessa circonferenza di centro O. Analogamente, se si considerano i punti di tangenza delle circonferenze di centro O e O'' con il lato A'', si avrà che QC e KC'' si incontrano in un punto Y della circonferenza di centro O', YC' tocca i cerchi di centro O e O'' in C' e  $QY \cdot YC=YC'^2$ . Inoltre, dovendo le rette per corde QB e YL incontrarsi ad angolo retto e la GC essere perpendicolare a QY, CG passa per I e si ha  $QY \cdot YC=YG^2$ ; quindi  $YG=YC'$ . Se allora si considera la congiungente G con C, questa interseca la circonferenza di centro O in N; tracciata per N la tangente NR sarà  $NR=RC'$  e (corollario 1 al Lemma 2) NR sarà parallela a GY e, perciò, il diametro per N risulterà parallelo a BQ e N è dato. Essendo per le stesse ragioni di prima  $B\hat{F}X$  retto e FC' perpendicolare a BX, FC' passerà per il dato punto H ed FC incontra la circonferenza nel punto M che è dato, essendo l'estremo del diametro parallelo a BQ passante per N. Si ha allora che il quadrilatero BQHI, inscritto nella circonferenza di centro O, è un rettangolo il cui diametro NM è parallelo a BQ, per il Lemma 4 allora considerate le secanti GIC, GNC', CMF, C'HF, il punto F sarà il punto di concorso corrispondente al punto G.

“Ma - conclude Trudi - si è veduto, che debba esser  $PT=PV$ , retti gli angoli PTL, PVK, e che sia dato il punto P; adunque la quistione è ricondotta alla soluzione di quest'altro Problema: *Trovare sulla BQ un punto G, che elevate su di essa da G, e dal suo corrispondente punto di concorso F le perpendicolari GL, FK, ed abbassate poi le LT, KV perpendicolari alle corde PB, PQ, risulti  $PT=PV$* ”<sup>105</sup>.

Anche questo problema è risolto con l'analisi geometrica. Trudi suppone di aver già trovato il punto G, congiunge G con O e prolunga GO fino ad incontrare QK in un punto S (fig. 26). Conduce da S le tangenti C'S e QS al cerchio di centro O. Sarà evidentemente  $CS=QS$ , La congiungente GC' interseca la circonferenza nel punto N. Trudi traccia la tangente UN in N, essendo U il punto di intersezione di detta tangente con la GS. Conduce poi da U la parallela UY a QS. Poiché per il Lemma 3 i punti G, U, S appartengono alla stessa retta, per la similitudine dei triangoli QGS e YGU si ottiene:

<sup>105</sup> *Ibid.*, p. 25.

$$QY:GY=SQ:UY \quad (15)$$

Preso, dunque, su QK il punto X tale che  $QX=2UY$ , essendo  $QK=2SQ$ , la (15) può scriversi

$$QY:GY=QK:QX \quad (16)$$

E poiché, tracciata la parallela XR a KV, dai triangoli QKV, QXR risulta

$$QK:QX=RV:RQ \quad (17)$$

Da (16) e (17) si ha

$$QY:GY=RV:RQ \quad (18)$$

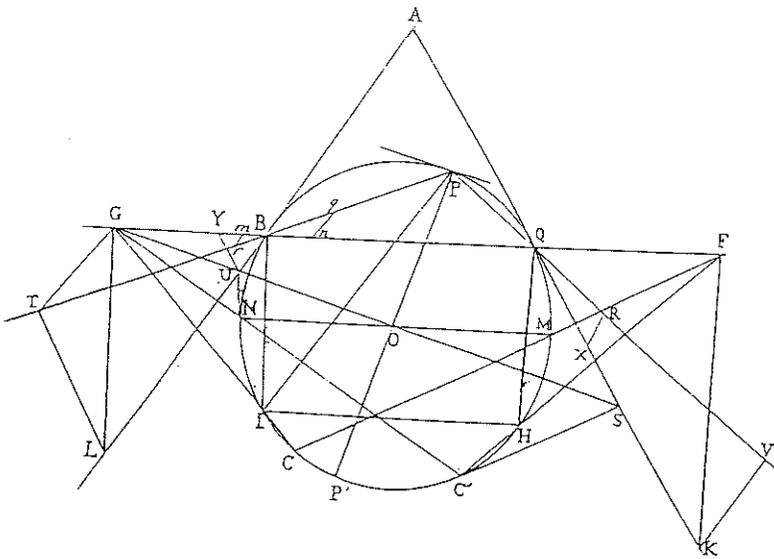


fig. 26

Presi su PT i punti q, r tali che  $Pq=PQ$  e  $qr=QR$ , poiché deve essere  $PT=PV$ , sarà  $Tr=VR$  e, quindi, la (18) si scriverà

$$QY:GY=Tr:rq$$

D'altra parte

$$Tr:rq=Gm:mn$$

per cui, in definitiva, si ha:

$$QY:GY=Gm:mn$$

ossia

$$QY \cdot mn = GY \cdot Gm \quad (19)$$

Ora, poiché gli angoli  $B\hat{G}L$  e  $B\hat{T}L$  sono retti, i triangoli rettangoli  $BGL$  e  $BTL$ , aventi la stessa ipotenua  $BL$ , sono inscritti nella stessa circonferenza, si ha che i punti  $B, G, T, L$  appartengono tutti a detta circonferenza, e che  $T\hat{G}L=B\hat{T}L=B\hat{I}P$  (essendo  $BG$  parallelo a  $BI$  e  $TG$  parallelo a  $PI$ ). Ciò comporta che, essendo  $m, n$  e  $P, T$  dati, le rette  $rm$  e  $qm$  sono date di sito e  $mn$  è data in lunghezza. E poiché  $QY$  è dato, per la (19) è dato anche il rettangolo  $GY \cdot Gm$ , e quindi  $G$  è dato.

La *composizione* del problema prende le mosse da una preliminare costruzione (fig. 17) che serve a individuare il punto  $G$  sulla retta per  $BQ$  in modo che sia  $GY \cdot Gm = QY \cdot mn$ . Con riferimento alla fig. 17, si tracciano i segmenti  $GIC, GNC', HCL$  e  $IC'K$  e le perpendicolari  $LT$  e  $KV$  alle rette  $PB$  e  $PQ$  i cui prolungamenti intersecheranno le rette per  $PC$  e per  $PC'$  rispettivamente in  $D$  e in  $E$ . I cerchi descritti intorno ai triangoli  $CLD$  e  $C'KE$  si toccheranno tra loro, toccheranno il cerchio  $BQK$  di centro  $O$ , saranno tangenti ai lati dell'angolo ed avranno per tangente comune la  $DE$  che formerà con l'angolo  $A$  il triangolo  $A'AA''$  equiangolo al triangolo dato a'aa'' e il problema è risolto.

A questa risoluzione Trudi fa seguire una *Osservazione*<sup>106</sup> nella quale, dopo aver fatto notare che esistono due punti  $G$  che soddisfano alle ipotesi del problema, fa scaturire, con sole considerazioni di carattere geometrico, tutta una serie di casi relativi alla posizione dei tre cerchi rispetto ai lati del triangolo che, nella sostanza, non differiscono da quelli ricavati anche da Padula<sup>107</sup>.

## CONCLUSIONI

Le soluzioni di Padula, pubblicate ancor prima che scadessero i termini del concorso, non poterono essere prese in considerazione, e Trudi, unico concorrente rimasto in gara, si aggiudicò il premio. Ma la sfida ai matematici del Regno che, nelle intenzioni di Flauti doveva sancire l'assoluto primato della sintesi geometrica sull'analisi algebrica, finì invece per dichiarare la decadenza della Scuola sintetica napoletana. Con le sue soluzioni Padula aveva definitivamente legittimato agli occhi della comunità matematica il metodo analitico-algebrico, mostrandone l'assoluta capacità di risolvere compiutamente i problemi di geometria anche secondo l'antica concezione di Pappo, essendo in grado di esibire la richiesta costruzione geometrica di un problema non di meno che la sintesi. Ed è non senza significato che la

---

<sup>106</sup>, *Ibid.*, p. 27.

<sup>107</sup> Trudi fornisce quindi un'altra soluzione di detto problema, non meno lunga e prolissa della precedente, condotta anch'essa rigorosamente con il metodo dell'analisi geometrica e fondata su una sequela di lemmi, corollari e teoremi (*Ibid.*, pp. 31-40).

speditezza, l'agilità, la potenza di questo metodo dovevano conquistare lo stesso Trudi che, da quel momento, abbandonò i metodi sintetici della scuola del Flauti per abbracciare quelli più efficaci dell'analisi.



## An Approach to the Homogenization of Nonlinear Elastomers in the Case of the Fixed Constraints Set

Nota di Luciano Carbone<sup>1</sup>, Doina Cioranescu<sup>2</sup>,  
Riccardo De Arcangelis<sup>3</sup> e Antonio Gaudiello<sup>4</sup>

Presentata dal Socio Luciano Carbone  
(Adunanza del 2 dicembre 2000)

*Key words:* homogenization, nonlinear elastomers, gradient constrained variational problems

**Abstract** - The homogenization process for some energies of integral type arising in the modelling of nonlinear rubber-like elastomers is presented. Such process is characterized by the presence of pointwise constraints on the gradient of the admissible deformations, and is carried out in the particular case of fixed constraints set. In such case minimal coerciveness hypotheses can be assumed, and the results can be obtained in the general framework of  $BV$  spaces. The minimum problems taken into account are of Dirichlet, Neumann, and mixed type.

**Riassunto** - Si presenta il processo di omogeneizzazione per alcuni tipi di energie di tipo integrale che intervengono nella modellizzazione degli elastomeri non lineari. Tale processo è caratterizzato dalla presenza di vincoli sui gradienti delle deformazioni ammissibili, ed è sviluppato nel caso in cui l'insieme di vincoli sia fisso. In tale caso possono essere assunte ipotesi minimali di coercitività, ed i risultati possono essere dimostrati nell'ambito generale degli spazi  $BV$ . I problemi di minimo trattati sono di tipo Dirichlet, Neumann e misto.

---

1 Università di Napoli "Federico II", Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, 80126 Napoli, Italy. E-mail: carbone@biol.dgdm.unina.it

2 Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Laboratoire d'Analyse Numérique, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. E-mail: cioran@ann.jussieu.fr

3 Università di Napoli "Federico II", Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, 80126 Napoli, Italy. E-mail: dearcang@matna2.dma.unina.it

4 Università di Cassino, Dipartimento di Automazione, Elettromagnetismo, Ingegneria dell'Informazione e Matematica Industriale, via G. Di Biasio 43, 03043 Cassino (Fr), Italy. E-mail: gaudiell@matna2.dma.unina.it

## POSITION OF THE PROBLEM AND STATEMENT OF THE RESULTS

In the present note we announce some results dealing with the homogenization of some variational problems arising in the theory of nonlinear elastomers, that will appear in [5].

The modelling of rubber-like elastomers has been developed following approaches based on molecular (polymer chain) statistical thermodynamic formulations, and phenomenological (usually continuum) formulations involving stored energy or strain energy functions.

For example, Treloar, in his classical book (cf. [15]), derives the strain energy density  $W$  getting (Mooney model)

$$(1) \quad W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right),$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are two elastic constants,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  are three principal extension ratios along three mutually perpendicular axes satisfying the condition for constancy of volume, namely  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , and obviously  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ .

Relation (1) gives, for example, in the case of the simple extension ( $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ )

$$(2) \quad W = C_1 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + C_2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda - 3 \right), \quad \lambda > 0.$$

Obviously the energy density, as function of such values of  $\lambda$ , is convex, has minimum in  $\lambda = 1$ , and diverges as  $\lambda$  increases or as  $\lambda$  vanishes.

More general models involve an explicit dependence of the constants  $C_1$  and  $C_2$  on the space variable  $x$ . More precisely, this occurs when treating non isotropic or viscoelastic materials (cf. for example [14]). We also mention that, in order to render rubber-like materials more rigid or to control their properties, rubber composites filled with inactive (carbon black and/or silica) or active elements (piezoelectric, magnetic or conductive particles) are widely utilized in industries.

All these models induce the consideration and the minimization of energies of the Calculus of Variations for convex densities with singularities, and defined on sets of deformations subject to constraints corresponding

to  $\lambda > 0$ , i.e. (in one dimension, and in the scalar case)

$$(3) \quad F(u) = \int_a^b f(x, u'(x)) dx, \quad u'(x) > 0 \text{ a.e. in } ]a, b[,$$

where it can be  $f(x, z) = C_1(x) \left( z^2 + \frac{2}{z} - 3 \right) + C_2(x) \left( \frac{1}{z^2} + 2z - 3 \right)$ , and, more generally, energies characterized by the presence of pointwise constraints on the gradients of the admissible deformations, and of singularities in the energy densities.

Equations linked to such integrands, and their physical interpretation have been recently studied by Banks et al. in the framework of the so called neo-Hookian materials (cf. [1]).

When the fillers are periodically distributed, homogenization phenomena appear naturally (we refer to [2], [8], and [11] for general references on homogenization theory). Obviously, in this case also the constraints set may quickly oscillate.

In this general setting, in [4] we began an analytic study of the gradient constrained homogenization processes suggested by these kinds of problems in the framework of unbounded functionals, i.e. variational functionals taking their values in  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ , in which gradient constrained problems seem to find a natural analytical setting (cf. [6]). We treated various classes of variational problems under very general assumptions on the constraints sets, and on the behaviours of the energy densities near their boundaries. In particular both of them were allowed to quickly oscillate.

In [5], which is announced in the present note, we examine the homogenization process when the constraints on the admissible deformations are essentially fixed. In this case it is possible for us to prove much sharper results, and under minimal assumptions. In particular, we are able to settle the homogenization process in the framework of  $BV$  spaces, and therefore to treat the case of gradient constrained linearly coercive problems too.

To be more precise, let us set  $Y = ]0, 1[^n$ , denote by  $\mathcal{L}$  the  $\sigma$ -algebra of the Lebesgue measurable subsets of  $\mathbf{R}^n$ , and by  $\mathcal{B}$  the one of the Borel subsets of  $\mathbf{R}^n$ . Let us take an energy density  $f$  satisfying

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f: (x, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto f(x, z) \in [0, +\infty], \\ f \text{ } \mathcal{L} \otimes \mathcal{B} \text{ measurable, } Y\text{-periodic in the } x \text{ variable,} \\ \hspace{15em} \text{convex in the } z \text{ one,} \end{array} \right.$$

and assume that the sets describing the constraints are fixed in the sense that (for every  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  we set  $\text{dom}g = \{z \in \mathbf{R}^n : g(z) < +\infty\}$ )

$$(5) \quad \text{dom}f(x, \cdot) = C \text{ for a.e. } x \in \mathbf{R}^n$$

for some convex set  $C$ , not necessarily bounded, satisfying

$$(6) \quad \text{int}(C) \neq \emptyset,$$

and that the following mild summability condition in the space variable

$$(7) \quad f(\cdot, z) \in L^1(Y) \text{ for every } z \in C$$

is fulfilled.

In this setting we are able to carry out the homogenization processes for Neumann, Dirichlet, and mixed problems, if the following coerciveness condition

$$(8) \quad \begin{cases} c_1|z|^p - c_2 \leq f(x, z) \text{ for a.e. } x \in \mathbf{R}^n, \\ \text{and every } z \in \mathbf{R}^n \text{ if } p \in ]1, +\infty[ \\ \text{dom}f(x, \cdot) \subseteq \{z \in \mathbf{R}^n : |z| < R\} \text{ for a.e. } x \in \mathbf{R}^n \text{ if } p = +\infty \end{cases}$$

for some  $p \in [1, +\infty]$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \in \mathbf{R}$ , and  $R > 0$  is satisfied.

It is worth while to remark that the results below will depend on a regularity index  $q$  of the admissible functions in the infimum problems. In fact it is well known that the corresponding infima may actually depend on this  $q$  (this feature is known as Lavrentieff phenomenon), and that such dependence may even survive the homogenization process (cf. [9], [10], and [12]). So, for every  $q \in [1, +\infty]$ , we first define  $f_{\text{hom}}^q$  as the nonnegative, real extended energy density given by ( $W_{\text{per}}^{1,q}(Y)$  is the set of the  $Y$ -periodic functions in  $W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbf{R}^n)$ )

$$(9) \quad f_{\text{hom}}^q: z \in \mathbf{R}^n \mapsto \inf \left\{ \int_Y f(y, z + \nabla v) dy : v \in W_{\text{per}}^{1,q}(Y) \right\},$$

and denote by  $\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q$  the lower semicontinuous envelope of  $f_{\text{hom}}^q$  and by  $(\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q)^\infty$  its recession function defined by

$$(\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q)^\infty: z \in \mathbf{R}^n \mapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(z_0 + tz) - \text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(z_0)}{t} \quad (z_0 \in C).$$

For every  $p \in [1, +\infty]$  we also set

$$p' = \begin{cases} +\infty & \text{if } p = 1 \\ \frac{p}{p-1} & \text{if } 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{if } p = +\infty, \end{cases} \quad p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-p} & \text{if } p < n \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, for a given open subset  $\Omega$  of  $\mathbf{R}^n$ , we denote by  $BV(\Omega)$  the set of the functions in  $L^1(\Omega)$  having distributional partial derivatives that are Borel measures with bounded total variations in  $\Omega$ . For every  $u \in BV(\Omega)$ , we denote the  $\mathbf{R}^n$ -valued measure gradient of  $u$  by  $Du$ , and the total variation of  $Du$  by  $|Du|$ . Moreover, according to Lebesgue Decomposition Theorem, we have that  $Du(E) = \int_E \nabla u dx + D^s u(E)$  for every Borel subset  $E$  of  $\Omega$ , where  $\nabla u$  is the density of the absolutely continuous part of  $Du$ , and  $D^s u$  is the singular part of  $Du$ , both with respect to Lebesgue measure. We also denote by  $\frac{dD^s u}{d|D^s u|}$  the Radon-Nikodym derivative of  $D^s u$  with respect to its total variation  $|D^s u|$ .

Then, in the case of Neumann minimum problems, we prove the following results.

**Theorem 1.** *Let  $f$  be as in (4) and satisfy (8) with  $p = 1$ , let  $q \in [1, +\infty]$ , and  $f_{\text{hom}}^q$  be defined in (9). Let  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  be convex such that (5)÷(7) hold. For every  $h \in \mathbf{N}$ , every convex bounded open set  $\Omega$ ,  $r \in ]1, 1^*[$ ,  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $\beta \in L^\infty(\Omega)$  let*

$$\begin{aligned} & i_h^N(q, \Omega, \beta) = \\ & = \inf \left\{ \int_\Omega f(hx, \nabla u) dx + \lambda \int_\Omega |u|^r dx + \int_\Omega \beta u dx : u \in W^{1,q}(\Omega) \right\}, \\ & m_\infty^N(q, \Omega, \beta) = \\ & = \min \left\{ \int_\Omega \text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(\nabla u) dx + \int_\Omega (\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q)^\infty \left( \frac{dD^s u}{d|D^s u|} \right) d|D^s u| + \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_\Omega |u|^r dx + \int_\Omega \beta u dx : u \in BV(\Omega) \right\}, \end{aligned}$$

and let  $\{u_h\} \subseteq W^{1,q}(\Omega)$  be such that  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \int_\Omega f(hx, \nabla u_h) dx + \lambda \int_\Omega |u_h|^r dx + \int_\Omega \beta u_h dx - i_h^N(q, \Omega, \beta) \right) = 0$ . Then  $f_{\text{hom}}^q$  is convex and satisfies

$$(10) \quad c_1 |z| - c_2 \leq f_{\text{hom}}^q(z) \text{ for every } z \in \mathbf{R}^n,$$

$\{i_h^N(q, \Omega, \beta)\}$  converges to  $m_\infty^N(q, \Omega, \beta)$ ,  $\{u_h\}$  is compact in  $L^1(\Omega)$ , and its converging subsequences converge to solutions of  $m_\infty^N(q, \Omega, \beta)$ .

In the results below we assume that

$$(11) \quad f(x, \cdot) \text{ is lower semicontinuous for a.e. } x \in \mathbf{R}^n.$$

**Theorem 2.** Let  $p \in ]1, +\infty]$ ,  $f$  be as in (4) and satisfy (8), let  $q \in [p, +\infty]$ , and  $f_{\text{hom}}^q$  be defined in (9). Let  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  be convex such that (5)÷(7) hold. For every  $h \in \mathbf{N}$ , every convex bounded open set  $\Omega$ ,  $r \in ]1, p^*$ ,  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $\beta \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $\gamma \in L^{p'}(\partial\Omega)$  let

$$(12) \quad \begin{aligned} i_h^N(q, \Omega, \beta, \gamma) &= \inf \left\{ \int_{\Omega} f(hx, \nabla u) dx + \right. \\ &+ \lambda \int_{\Omega} |u|^r dx + \int_{\Omega} \beta u dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u dH^{n-1} : u \in W^{1,q}(\Omega) \left. \right\}, \\ m_\infty^N(q, \Omega, \beta, \gamma) &= \min \left\{ \int_{\Omega} \text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(\nabla u) dx + \right. \\ &+ \lambda \int_{\Omega} |u|^r dx + \int_{\Omega} \beta u dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u dH^{n-1} : u \in W^{1,p}(\Omega) \left. \right\}, \end{aligned}$$

and let  $\{u_h\} \subseteq W^{1,q}(\Omega)$  be such that  $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\int_{\Omega} f(hx, \nabla u_h) dx + \lambda \int_{\Omega} |u_h|^r dx + \int_{\Omega} \beta u_h dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u_h dH^{n-1} - i_h^N(q, \Omega, \beta, \gamma)) = 0$ . Then  $f_{\text{hom}}^q$  is convex and satisfies

$$(13) \quad \begin{cases} c_1 |z|^p - c_2 \leq f_{\text{hom}}^q(z) \text{ for every } z \in \mathbf{R}^n & \text{if } p \in ]1, +\infty[ \\ \text{dom } f_{\text{hom}}^q \subseteq \{z \in \mathbf{R}^n : |z| < R\} & \text{if } p = +\infty, \end{cases}$$

$\{i_h^N(q, \Omega, \beta, \gamma)\}$  converges to  $m_\infty^N(q, \Omega, \beta, \gamma)$ ,  $\{u_h\}$  is compact in  $L^p(\Omega)$ , and its converging subsequences converge to solutions of  $m_\infty^N(q, \Omega, \beta, \gamma)$ .

Moreover, if  $q = p$  and (11) too holds, then  $\text{sc}^- f_{\text{hom}}^p = f_{\text{hom}}^p$ , for every  $z \in \mathbf{R}^n$  the infimum in the definition of  $f_{\text{hom}}^p(z)$  is attained, problems in (12) have solutions, and for every  $h \in \mathbf{N}$  one can take  $u_h$  as a minimizer of  $i_h^N(q, \Omega, \beta, \gamma)$ .

Finally, if  $\int_{\Omega} \beta dx + \int_{\partial\Omega} \gamma dH^{n-1} = 0$ , one can take also  $\lambda = 0$ .

In the case of Dirichlet minimum problems, we prove the following results (for every  $z_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $u_{z_0}$  is the linear function with gradient  $z_0$ ; for every open set with Lipschitz boundary  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}_\Omega$  is the unit outward normal to  $\partial\Omega$ ; and  $H^{n-1}$  the  $(n-1)$ -dimensional Hausdorff measure).

**Theorem 3.** Let  $f$  be as in (4) and satisfy (8) with  $p = 1$ , let  $q \in [1, +\infty]$ , and  $f_{\text{hom}}^q$  be defined in (9). Let  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  be convex such that (5)÷(7) hold. For every  $h \in \mathbf{N}$ , every convex bounded open set  $\Omega$ ,  $\beta \in L^\infty(\Omega)$ ,  $z_0 \in \text{int}(C)$ ,  $c \in \mathbf{R}$  let

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & i_h^D(q, \Omega, \beta) = \\
 & = \inf \left\{ \int_{\Omega} f(hx, \nabla u) dx + \int_{\Omega} \beta u dx : u \in u_{z_0} + c + W_0^{1,q}(\Omega) \right\}, \\
 & m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta) = \\
 & = \min \left\{ \int_{\Omega} \text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(\nabla u) dx + \int_{\Omega} (\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q)^{\infty} \left( \frac{dD^s u}{|dD^s u|} \right) d|D^s u| + \right. \\
 & \left. + \int_{\partial\Omega} (\text{sc}^- f_{\text{hom}}^q)^{\infty}((u - u_{z_0} - c)\mathbf{n}_{\Omega}) dH^{n-1} + \int_{\Omega} \beta u dx : u \in BV(\Omega) \right\},
 \end{aligned}$$

and let  $\{u_h\} \subseteq u_{z_0} + c + W_0^{1,q}(\Omega)$  satisfy  $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\int_{\Omega} f(hx, \nabla u_h) dx + \int_{\Omega} \beta u_h dx - i_h^D(q, \Omega, \beta)) = 0$ . Then  $f_{\text{hom}}^q$  is convex and satisfies (10),  $\{i_h^D(q, \Omega, \beta)\}$  converges to  $m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta)$ ,  $\{u_h\}$  is compact in  $L^1(\Omega)$ , and its converging subsequences converge to solutions of  $m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta)$ .

**Theorem 4.** Let  $p \in ]1, +\infty]$ ,  $f$  be as in (4) and satisfy (8), let  $q \in [p, +\infty]$ , and  $f_{\text{hom}}^q$  be defined in (9). Let  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  be convex such that (5)÷(7) hold. For every  $h \in \mathbf{N}$ , every convex bounded open set  $\Omega$ ,  $\beta \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $z_0 \in \text{int}(C)$ ,  $c \in \mathbf{R}$  let  $i_h^D(q, \Omega, \beta)$  be defined in (14),

$$\begin{aligned}
 & m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta) = \\
 & = \min \left\{ \int_{\Omega} \text{sc}^- f_{\text{hom}}^q(\nabla u) dx + \int_{\Omega} \beta u dx : u \in u_{z_0} + c + W_0^{1,p}(\Omega) \right\},
 \end{aligned}$$

and let  $\{u_h\} \subseteq u_{z_0} + c + W_0^{1,q}(\Omega)$  satisfy  $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\int_{\Omega} f(hx, \nabla u_h) dx + \int_{\Omega} \beta u_h dx - i_h^D(q, \Omega, \beta)) = 0$ . Then  $f_{\text{hom}}^q$  is convex and satisfies (13),  $\{i_h^D(q, \Omega, \beta)\}$  converges to  $m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta)$ ,  $\{u_h\}$  is compact in  $L^p(\Omega)$ , and its converging subsequences converge to solutions of  $m_{\infty}^D(q, \Omega, \beta)$ .

Moreover, if  $q = p$  and (11) too holds, then  $\text{sc}^- f_{\text{hom}}^p = f_{\text{hom}}^p$ , for every  $z \in \mathbf{R}^n$  the infimum in the definition of  $f_{\text{hom}}^p(z)$  is attained, problems in

(14) have solutions, and for every  $h \in \mathbf{N}$  one can take  $u_h$  as a minimizer of  $i_h^D(q, \Omega, \beta)$ .

Finally, we treat case of mixed minimum problems.

In this case, we prove convergence results in the framework of Sobolev spaces, and under the following superlinear growth assumption

$$(15) \quad \phi(z) \leq f(x, z) \leq a(x) + M\phi(z) \text{ for a.e. } x \in \mathbf{R}^n, \text{ and every } z \in \mathbf{R}^n$$

for some  $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  convex such that  $\text{int}(\text{dom}\phi) \neq \emptyset$  and  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{|z|} = +\infty$ ,  $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$   $Y$ -periodic,  $M \geq 0$ .

For every open set with Lipschitz boundary  $\Omega$ , and  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ , we set  $W_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : u = 0 \text{ } H^{n-1}\text{-a.e. in } \Gamma\}$ .

**Theorem 5.** *Let  $f$  be as in (4), and  $f_{\text{hom}}^1$  be defined in (9) with  $q = 1$ . Assume that (15) holds with  $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  convex and satisfying  $\text{int}(\text{dom}\phi) \neq \emptyset$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{|z|} = +\infty$ ,  $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$   $Y$ -periodic, and  $M \geq 0$ . For every  $h \in \mathbf{N}$ , every convex bounded open set  $\Omega$ ,  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$  with  $H^{n-1}(\Gamma) > 0$ ,  $\beta \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$ ,  $z_0 \in \text{int}(\text{dom}\phi)$ ,  $c \in \mathbf{R}$  let*

$$(16) \quad \begin{aligned} i_h^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma) &= \inf \left\{ \int_{\Omega} f(hx, \nabla u) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \beta u dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u dH^{n-1} : u \in u_{z_0} + c + W_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega) \right\}, \\ m_{\infty}^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma) &= \min \left\{ \int_{\Omega} \text{sc}^- f_{\text{hom}}^1(\nabla u) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \beta u dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u dH^{n-1} : u \in u_{z_0} + c + W_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega) \right\}, \end{aligned}$$

and let  $\{u_h\} \subseteq u_{z_0} + c + W_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega)$  satisfy  $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\int_{\Omega} f(hx, \nabla u_h) dx + \int_{\Omega} \beta u_h dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u_h dH^{n-1} - i_h^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma)) = 0$ . Then  $f_{\text{hom}}^1$  is convex and satisfies

$$\text{sc}^- \phi(z) \leq f_{\text{hom}}^1(z) \leq \int_Y a(y) dy + M \text{sc}^- \phi(z) \text{ for every } z \in \mathbf{R}^n,$$

$\{i_h^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma)\}$  converges to  $m_{\infty}^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma)$ ,  $\{u_h\}$  is compact in  $L^1(\Omega)$ , and its converging subsequences converge to solutions of  $m_{\infty}^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma)$ .

Moreover, if (11) too holds, then  $\text{sc}^- f_{\text{hom}}^1 = f_{\text{hom}}^1$ , for every  $z \in \mathbf{R}^n$  the infimum in the definition of  $f_{\text{hom}}^1(z)$  is attained, problems in (16) have solutions, and for every  $h \in \mathbf{N}$  one can take  $u_h$  as a minimizer of  $i_h^M(\Omega, \Gamma, \beta, \gamma)$ .

We point out explicitly that (15) implies that  $\text{dom}f(x, \cdot) = \text{dom}\phi$  for a.e.  $x \in \mathbf{R}^n$ , and that the choice  $q = 1$  is natural since again (15) selects the space of the functions that make the functionals in (16) finite as the one of the elements  $u \in u_{z_0} + c + W_{0,\Gamma}^{1,1}(\Omega)$  for which  $\int_{\Omega} \phi(\nabla u) dx < +\infty$

Eventually, we point out that, since  $f$  may take the value  $+\infty$ , the variational problems in (12), (14), and (16) are actually settled in spaces of functions satisfying the pointwise oscillating constraint  $\nabla u(x) \in C$  for a.e.  $x \in \Omega$ , and every  $h \in \mathbf{N}$ . Analogously, since  $f_{\text{hom}}^q$  too may take the value  $+\infty$ , also the corresponding limit problems are subject to the constraint on the admissible functions  $\nabla u(x) \in \text{dom}f_{\text{hom}}^q$  for a.e.  $x \in \Omega$ .

The proofs of the above results are based on the results of [4], on a recent unique extension result for abstract functionals defined on classes of smooth open sets and functions (cf. [7]), and on De Giorgi's  $\Gamma$ -convergence theory (cf. [13]).

## REFERENCES

- [1] Banks A.H.T., Lybeck N.J., Munoz B. and Yanyo L. (1995) *Nonlinear Elastomers: Modeling and Estimation*. Proceedings of the "Third IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation", vol. 1, Limassol, Cyprus, 1-7.
- [2] Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G. (1978) *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Stud. Math. Appl. 5, North Holland.
- [3] Carbone L., Cioranescu D., De Arcangelis R. and Gaudiello A. (2000) *An Approach to the Homogenization of Nonlinear Elastomers via the Theory of Unbounded Functionals*. To appear in C. R. Acad. Sci. Paris.
- [4] Carbone L., Cioranescu D., De Arcangelis R. and Gaudiello A. (2000) *Homogenization of Unbounded Functionals and Nonlinear Elastomers. The General Case*. Preprint Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- [5] Carbone L., Cioranescu D., De Arcangelis R. and Gaudiello A. (2000) *Homogenization of Unbounded Functionals and Nonlinear Elastomers. The Case of the Fixed Constraints Set*. Preprint Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).
- [6] Carbone L. and De Arcangelis R. (1997) *On Integral Representation, Relaxation and Homogenization for Unbounded Functionals*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 8, (1997), 129-135.

- [7] Carbone L. and De Arcangelis R. (2000) *On the Unique Extension Problem for Functionals of the Calculus of Variations*. Preprint Università di Napoli "Federico II".
- [8] Cioranescu D. and Donato P. (1999) *An Introduction to Homogenization*. Oxford Lecture Ser. Math. Appl. **17**, Oxford University Press.
- [9] Corbo Esposito A. and De Arcangelis R. (1992) *The Lavrentieff Phenomenon and Different Processes of Homogenization*. Comm. Partial Differential Equations **17**, 1503-1538.
- [10] Corbo Esposito A. and Serra Cassano F. (1997) *A Lavrentieff Phenomenon for Problems of Homogenization with Constraints on the Gradient*. Ricerche Mat. **46**, 127-159.
- [11] Dal Maso G. (1993) *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **8**, Birkhäuser-Verlag.
- [12] D'Apice C., Durante T. and Gaudiello A. (1999) *Some New Results on a Lavrentieff Phenomenon for Problems of Homogenization with Constraints on the Gradient*. Matematiche **54**, 3-47.
- [13] De Giorgi E. and Franzoni T. (1975) *Su un tipo di convergenza variazionale*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **58**, 842-850.
- [14] Renardy M., Hrusa W.J. and Nohel J.A. (1987) *Mathematical Problems in Viscoelasticity*. Pitman Monograph, Longman/J. Wiley & Sons.
- [15] Treloar L.R.G. (1975) *The Physics of Rubber Elasticity*. Clarendon Press, Oxford (first ed. 1949).

## ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI

Il *Rendiconto* pubblica, di norma in lingua italiana, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Nella stesura della *Nota* si raccomanda l'uso di Microsoft® Word 2000 o in alternativa di LaTeX™. Le *note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom). La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto e stampati con una stampante laser dalla buona risoluzione (600 dpi). Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere stampate ad alto contrasto. Una copia a bassa risoluzione o una fotocopia di ciascuna fotografia, grafico o disegno, sarà collocata opportunamente nel dattiloscritto accompagnata dalla relativa didascalia, l'originale sarà sempre allegato a parte. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti Bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate nell'esempio in *Appendice*.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori sarà superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che comunicherà l'ammontare della spesa.



## APPENDICE

### NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

#### **Prima pagina.**

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara  
(canale d'Ischia, Campania)  
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1,\*</sup>

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

*Key words:* stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte  
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**  
Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1\*</sup>

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

*Key words* : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

**Abstract** - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

**Riassunto** - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

## 1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione,  
primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo  
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo  
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

---

<sup>1,2..</sup> Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

\* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

**BIBLIOGRAFICI (REFERENCES).** I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome.* Science, **230**, 157-163.  
Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics.* Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando TMS 9.

Es:

**Acknowledgements:** i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

---

<sup>1</sup> Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

\* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

